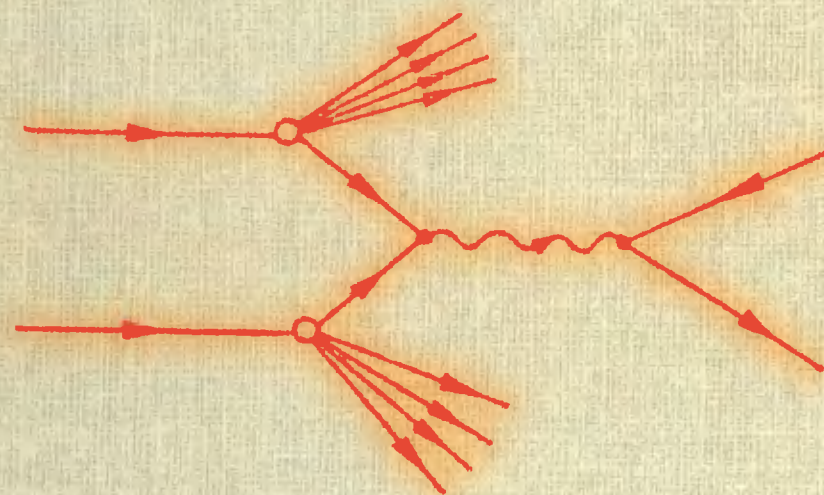


В. И. ГОЛЬДАНСКИЙ    Ю. П. НИКИТИН    И. Л. РОЗЕНТАЛЬ

539.17  
Г-63

В. И. ГОЛЬДАНСКИЙ  
Ю. П. НИКИТИН  
И. Л. РОЗЕНТАЛЬ

# КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ



Г-63 ✓

В.И. ГОЛЬДАНСКИЙ  
Ю.П. НИКИТИН  
И.Л. РОЗЕНТАЛЬ

---

# КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

---

8064



МОСКВА "НАУКА"  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1987

5458

Гольданский В.И., Никитин Ю.П., Розенталь И.Л.  
**Кинематические методы в физике высоких энергий.** — М.: Наука. Гл.  
ред. физ.-мат. лит., 1987. — 200 с., ил.

Изложены кинематические методы анализа взаимодействий элементарных частиц. Существенный прогресс в этой области обусловлен введением в строй ускорителей нового поколения и созданием интенсивных нейтринных пучков. Основная цель книги — представить кинематику в форме, оптимальной для исследований, проводимых на современных ускорителях. Большое внимание уделено кинематике процессов рождения и распада тяжелых частиц.

Для физиков — теоретиков и экспериментаторов, а также аспирантов и студентов, интересующихся физикой элементарных частиц.

Табл. 3. Ил. 19. Библиогр. 73 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук *Мурзин В.С.*

Виталий Иосифович Гольданский  
Юрий Петрович Никитин  
Иосиф Леонидович Розенталь

## КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Редактор *М.Н. Андреева*  
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*  
Технические редакторы *С.Н. Баронина, С.В. Геворкян*  
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве  
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12795

Сдано в набор 06.11.86. Подписано к печати 01.04.87. Т — 09680  
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1  
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 12,5. Усл. кр.-отт. 12,5. Уч.-изд. л. 13,62  
Тираж 2800 экз. Тип. зак. 458. Цена 2 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство "Наука"  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15  
4-я типография издательства "Наука"  
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

1704070000-108  
Г 94-87  
053 (02)-87

© Издательство "Наука".  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1987

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                    |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Предисловие .....                                                                                                                                  |  |
| Система единиц .....                                                                                                                               |  |
| Основные обозначения .....                                                                                                                         |  |
| <b>Глава 1. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ ЧАСТИЦ .....</b>                                                                                      |  |
| 1.1. Введение. Методы и предмет кинематики частиц .....                                                                                            |  |
| 1.2. Преобразования Лоренца. Релятивистские инварианты .....                                                                                       |  |
| 1.3. Системы отсчета .....                                                                                                                         |  |
| 1.4. Кинематические переменные в реакциях взаимодействия и распада.<br>Законы сохранения энергии и импульса .....                                  |  |
| 1.5. Фазовый объем. Вероятность распада и сечение процесса .....                                                                                   |  |
| 1.6. Резонансы и нерезонансный фон .....                                                                                                           |  |
| <b>Глава 2. КИНЕМАТИКА ДВУХЧАСТИЧНЫХ РАСПАДОВ .....</b>                                                                                            |  |
| 2.1. Двухчастичный распад в системе покоя нестабильной частицы .....                                                                               |  |
| 2.2. Энергетическое распределение продуктов двухчастичного распада<br>движущейся частицы .....                                                     |  |
| 2.3. Угловые распределения вторичных частиц при двухчастичных распадах<br>на лету .....                                                            |  |
| 2.4. Распределение по углу разлета вторичных частиц при двухчастичном<br>распаде на лету .....                                                     |  |
| 2.5. Распределение продуктов двухчастичного распада по поперечному<br>импульсу .....                                                               |  |
| 2.6. Примеры использования кинематических закономерностей в физике<br>распадов элементарных частиц .....                                           |  |
| <b>Глава 3. КИНЕМАТИКА ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РАСПАДОВ .....</b>                                                                                            |  |
| 3.1. Трехчастичный распад в системе покоя нестабильной частицы. Кинема-<br>тические переменные и ограничения .....                                 |  |
| 3.2. Распределения по энергиям, углам вылета, эффективным массам<br>продуктов трехчастичного распада в системе покоя нестабильной<br>частицы ..... |  |
| 3.3. Трехчастичные распады на лету .....                                                                                                           |  |
| 3.4. Распределение по поперечному импульсу .....                                                                                                   |  |
| 3.5. Конус распада .....                                                                                                                           |  |
| <b>Глава 4. УПРУГИЕ И КВАЗИУПРУГИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ<br/>РАССЕЯНИЯ .....</b>                                                                  |  |
| 4.1. Кинематика процессов двухчастичного рассеяния .....                                                                                           |  |
| 4.2. Дифференциальные распределения в двухчастичных упругих и квази-<br>упругих процессах .....                                                    |  |
| 4.3. Примеры применения кинематики двухчастичных процессов .....                                                                                   |  |



|                                                                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава 5. КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ АДРОНОВ. . . . .</b>                                                          | <b>105</b> |
| 5.1. Инклюзивный метод описания и исследования множественных процессов . . . . .                                                          | 105        |
| 5.2. Кинематические переменные инклюзивных реакций . . . . .                                                                              | 109        |
| 5.3. Области фрагментации и пионизации в множественных процессах. Явление скейлинга . . . . .                                             | 121        |
| 5.4. Кинематика мультипериферизма . . . . .                                                                                               | 127        |
| 5.5. Инклюзивное образование тяжелых частиц с последующим двухчастичным распадом . . . . .                                                | 132        |
| 5.6. Кинематика инклюзивного образования тяжелых частиц с последующим трехчастичным распадом . . . . .                                    | 138        |
| <b>Глава 6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ. . . . .</b>                             | <b>146</b> |
| 6.1. Статистический подход к процессам множественного образования адронов . . . . .                                                       | 146        |
| 6.2. Ковариантная и другие статистические модели множественных процессов . . . . .                                                        | 149        |
| 6.3. Гидродинамическая модель множественных процессов. . . . .                                                                            | 154        |
| 6.4. Следствия термодинамической модели. . . . .                                                                                          | 160        |
| <b>Глава 7. КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. . . . .</b>                                                            | <b>165</b> |
| 7.1. Кинематические переменные лептон-нуклонного взаимодействия . . . . .                                                                 | 165        |
| 7.2. Феноменология упругих и глубоконеупругих лептон-нуклонных процессов . . . . .                                                        | 171        |
| 7.3. Скейлинг и кинематика кварк-партоиной модели глубоконеупругих лептон-нуклонных взаимодействий . . . . .                              | 175        |
| 7.4. Кинематика лептон-партонных соударений в брейтовской системе отсчета. . . . .                                                        | 183        |
| 7.5. Кинематика процессов образования лептонных пар и промежуточных бозонов в кварк-партоиной модели адрон-нуклонных соударений . . . . . | 187        |
| Заключение. . . . .                                                                                                                       | 196        |
| Список литературы . . . . .                                                                                                               | 198        |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга посвящена кинематическим методам анализа и описания процессов взаимодействия элементарных частиц — методам, широко используемым как в теоретических исследованиях, так и в практике современного физического эксперимента.

Это далеко не первое руководство по кинематике. Первой монографией была книга "Кинематика ядерных реакций" (1959 г.), написанная А.М. Балдиным, В.И. Гольданским и И.Л. Розенталем, выдержавшая два издания (во втором издании (1968 г.) к коллективу авторов присоединился В.М. Максименко) и переведенная на многие языки. Эта книга охватывала широкий круг проблем кинематики ядерных реакций и физики элементарных частиц, которые составляли главный предмет исследований в 50-е и 60-е гг.

В 1970 г. вышла книга Г.И. Копылова "Кинематика резонансов", отразившая одно из главных направлений физики элементарных частиц, бурно развивавшееся в 60-е гг., — кинематику процессов образования и распада адронных резонансов. В 1975 г. в переводе на русский язык появилась книга финских физиков Е. Бюклинга и К. Каянти "Кинематика элементарных частиц". Эта книга, охватившая широкий круг кинематических проблем физики элементарных частиц, характерных для конца 60-х — начала 70-х гг. написана на высоком математическом уровне и поэтому является несомненно хорошим руководством для профессиональных физиков-теоретиков. Однако для начинающих теоретиков и физиков-экспериментаторов эта книга, по нашему мнению, слишком сложна.

Предлагаемая книга предназначена в первую очередь для студентов, аспирантов, молодых ученых, специализирующихся в области физики элементарных частиц, и может оказаться полезной для уже сложившихся физиков-экспериментаторов, ведущих исследования в этой области науки.

Главные цели, которые преследовали авторы, это, во-первых, сделать книгу максимально доступной по своему уровню для начинающих исследователей и, во-вторых, приблизить содержание книги к современным проблемам физики частиц высоких энергий, которые уже решаются или будут решаться в обозримом будущем. В данной книге излагаются традиционные кинематические методы исследования взаимодействий элементарных

частиц и новые методы, развитые в последние годы. Необходимость в модернизации кинематических методов обусловлена в значительной степени вводом в строй ускорителей частиц вплоть до энергий, равных нескольким тысячам гигаэлектронвольт в лабораторной системе отсчета.

В исследованиях процессов образования и распада элементарных частиц (в том числе очарованных и прелестных адронов, адронов, содержащих тяжелые  $t$ -кварки, квантов слабого взаимодействия —  $W^\pm$  и  $Z^0$ -бозонов и других наблюдаемых или пока гипотетических частиц) кинематические методы идентификации и анализа играют первостепенную роль. Поэтому авторы надеются, что предлагаемая книга окажется полезной для указанного выше круга читателей. В литературных ссылках авторы не стремились достичь максимальной полноты, да это было бы почти невозможной задачей. Круг ссылок в данной книге отражает в какой-то мере научные интересы авторов и те работы, которыми они пользовались.

Авторы будут весьма признательны читателям, которые сообщат о замеченных опечатках, недочетах и выскажут свои суждения по поводу содержания книги.

Авторы благодарят В.С. Мурзина за обсуждение вопросов, затронутых в книге, и А.Л. Сударикова за помощь в ее оформлении.

## СИСТЕМА ЕДИНИЦ

В книге используется специальная система единиц, в которой постоянная Планка  $\hbar$  и скорость света  $c$  считаются безразмерными единичными постоянными:  $\hbar = c = 1$ . В этой системе единиц, естественной для релятивистской физики элементарных частиц, такие физические величины, как энергия  $E$ , импульс  $p$ , масса частицы  $m$  измеряются в одних и тех же единицах:

$$[E] = [p] = [m] = [M],$$

где  $[M]$  — размерность массы, которая измеряется обычно в гигаэлектронвольтах ( $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$ ;  $1 \text{ эВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ ). Величины с размерностью длины  $[L]$  и времени  $[t]$  в принятой системе единиц имеют одинаковую размерность:

$$[L] = [t] = [M^{-1}].$$

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

|                                |                                                                                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $m, M, \mu$                    | — массы частиц,                                                                  |
| $E, \omega, p_0$               | — полная энергия частицы,                                                        |
| $p, k$                         | — трехмерный вектор (3-вектор) импульса частицы,                                 |
| $p, k$                         | — четырехмерный вектор (4-вектор) импульса частицы,                              |
| $p_\alpha, k_\alpha$           | — декартовы компоненты 3-импульса ( $\alpha = 1, 2, 3$ или $\alpha = x, y, z$ ), |
| $p_i, k_i$                     | — компоненты 4-импульса ( $i = 0, 1, 2, 3$ или $i = t, x, y, z$ ),               |
| $q$                            | — переданный 3-импульс,                                                          |
| $q$                            | — переданный 4-импульс,                                                          |
| $u$                            | — переменная быстроты,                                                           |
| $\eta$                         | — переменная псевдобыстроты,                                                     |
| $p_{\parallel}, k_{\parallel}$ | — продольная составляющая 3-импульса,                                            |
| $p_{\perp}, k_{\perp}$         | — поперечная составляющая 3-импульса,                                            |
| $\theta$                       | — полярный угол вылета частицы,                                                  |
| $\varphi$                      | — азимутальный угол вылета частицы,                                              |
| $v$                            | — 3-скорость частицы или системы отсчета,                                        |
| $(pk)$                         | — скалярное произведение 4-векторов $p$ и $k$ ,                                  |
| $(pk)$                         | — скалярное произведение 3-векторов $p$ и $k$ ,                                  |

## ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ ЧАСТИЦ

### 1.1. Введение. Методы и предмет кинематики частиц

Весьма важные физические характеристики релятивистской частицы — ее полная энергия  $E$  и трехмерный вектор импульса  $p$ , образующие четырехмерный вектор энергии-импульса в псевдоевклидовом пространстве Минковского. В результате взаимодействия частиц осуществляются самые разнообразные процессы их превращений. В первую очередь следует назвать процессы упругого рассеяния без изменения сортов и числа частиц, вступающих в реакцию и образующихся в результате реакции; процессы образования вторичных частиц, отличающихся от первичных, процессы множественного образования вторичных частиц в результате соударения двух первичных. Поскольку большинство элементарных частиц нестабильны, то к процессам их взаимодействия относятся и процессы распада — реакции превращения одной частицы в несколько вторичных.

Основой экспериментального изучения свойств различных процессов взаимодействия частиц является измерение импульсных характеристик большинства частиц (или, по возможности, всех), участвующих в процессе. Распределение вторичных частиц по импульсам, полученное в результате обработки и анализа наблюдаемых событий определенного типа, является первоосновой проверки различных теоретических моделей динамики взаимодействия.

Из самой постановки задачи экспериментального наблюдения процессов взаимодействия частиц вытекает важность и неизбежность кинематического анализа данных. Такой анализ подразумевает получение сведений об энергиях, импульсах, углах вылета (разлета) вторичных частиц при фиксированных импульсах первичных в какой-то определенной физической системе отсчета, которую можно с достаточной степенью точности принять за инерциальную. Такие характеристики частиц, как их масса, спин, заряд и другие внутренние квантовые числа требуют специальных измерений и при анализе импульсных характеристик считаются заданными. Таким образом, кинематика изучает импульсно-энергетические состояния частиц, участвующих в процессе взаимодействия. Основная задача кинематики — описание столкновений частиц высоких энергий без привлечения динамики, т.е. конкретных механизмов взаимодействия. Основой кинематического метода является использование всей совокупности законов сохранения, действующих в мире элементарных частиц, для предсказания таких особенностей реакций их взаимодействия, которым можно было бы верить практически безоговорочно. К таким законам сохранения относятся сохране-

ние энергии, импульса, момента импульса, дискретных внутренних квантовых чисел частиц. Кроме законов сохранения, кинематические методы используют самые общие постулаты и следствия квантовой механики (квантовой теории поля) и одно из наиболее важных следствий специальной теории относительности — требование релятивистской инвариантности описания процессов взаимодействия, т.е. независимости физических законов от выбора инерциальной системы отсчета.

Кинематические методы описания опираются также на так называемую статистическую гипотезу, согласно которой вероятность физических процессов пропорциональна релятивистским элементам фазовых объемов вторичных частиц с учетом законов сохранения энергии и импульса (см. ниже). Эта гипотеза позволяет предсказывать импульсные распределения вторичных частиц. Соответствующие предсказания не учитывают динамику взаимодействия и поэтому в общем случае не оправдываются на опыте. Однако при отсутствии сведений о динамике процесса такие предсказания дают предварительную информацию об импульсных распределениях вторичных частиц. В ряде случаев подобный подход позволяет сформулировать принципиально новые и наиболее эффективные методы экспериментального поиска и исследования свойств новых частиц и процессов.

Поскольку кинематические методы привлекают сведения о динамике процессов, как правило, в наиболее простой, феноменологической форме, их использование доступно широкому кругу исследователей, знакомых с основами специальной теории относительности и основными принципами квантовой механики в объеме стандартного курса теоретической физики [1, 2]. Начиная физикам полезно также ознакомиться с простейшими, но необходимыми сведениями о свойствах и характеристиках элементарных частиц, например, по книге [3] или другим руководствам [4].

В изложении кинематических методов авторы не претендуют на энциклопедическую полноту, сознательно ограничивая выбор материала наиболее простыми, но необходимыми для начинающих исследователей кинематическими проблемами и закономерностями. С целым рядом вопросов, не затронутых в данной книге, можно ознакомиться в монографиях [5 — 7]. Авторы не всегда стремились указать на первоисточники многих кинематических соотношений, ограничиваясь, в основном, ссылками на наиболее доступные читателю монографии или обзорные работы.

## 1.2. Преобразования Лоренца. Релятивистские инварианты

Основной кинематической характеристикой частицы в физике взаимодействий элементарных частиц является 4-вектор энергии-импульса  $p$ , временная компонента которого — полная энергия частицы  $E$ , а пространственные компоненты — составляющие 3-импульса частицы  $p$  вдоль осей декартовой системы координат  $x, y, z$  (или 1, 2, 3):

$$p = (p_0, p) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, p_1, p_2, p_3), \quad (1.1)$$

$$p_0 = E, \quad p = (p_x, p_y, p_z).$$

Компоненты 3-вектора  $p$  могут быть заданы не только в декартовой системе координат, но и в любой другой, например в сферической, цилиндрической и т.п.

Как известно, 4-мерное пространство-время Минковского псевдоевклидово [1]. Его метрику можно охарактеризовать метрическим тензором  $g_{ik}$ , тензорные индексы которого пробегает значения  $i, k = 0, 1, 2, 3$ . Тензор  $g_{ik}$  имеет следующие компоненты:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0, \text{ если } i \neq k.$$

Далее полагаем, что в любой инерциальной системе отсчета, в которой наблюдаются физические процессы, метрика пространства-времени определяется тензором  $g_{ik}$ . Переход от одной инерциальной системы к другой, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ , осуществляется с помощью преобразований Лоренца [1]. Пусть в исходной системе отсчета и системе, движущейся со скоростью  $v$  относительно исходной, заданы декартовы системы координат с осями, параллельными друг другу, а скорость  $v$  направлена вдоль оси  $z$  исходной системы координат (ось  $z'$  движущейся системы координат параллельна  $z$ ). Тогда компоненты 4-вектора (1.1) преобразуются по правилу: в движущейся (штрихованной) системе [1]

$$E' = \frac{E - (vp)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad p'_z = \frac{p_z - Ev_z}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2)  $(vp)$  — скалярное произведение двух 3-векторов  $v$  и  $p$ ,  $v_z = |v| = v$ , если скорость  $v$  направлена вдоль оси  $z$ , и  $v_z = -v$ , если она направлена против оси  $z$ . Пространственно-поперечные по отношению к скорости  $v$  компоненты 3-импульса  $p$  не претерпевают изменения при переходе из исходной системы отсчета в движущуюся. Формулы преобразований Лоренца (1.2) легко обобщить на случай произвольного расположения осей штрихованной системы координат относительно нештрихованной. Это обобщение излишне для выражения  $E$ , которое уже записано в виде, справедливом для произвольного направления скорости  $v$ . Компоненты  $p_z$  и  $p_z$  можно представить в виде

$$p'_z = (p'v)/v, \quad p_z = (pv)/v,$$

а 3-векторы  $p'$  и  $p$  можно записать в виде векторной суммы продольной (вдоль вектора  $v$ ) и поперечной (перпендикулярной вектору  $v$ ) составляющих:

$$\begin{aligned} p' &= p'_\parallel + p'_\perp, & p &= p_\parallel + p_\perp, \\ p'_\perp &= (p'_x, p'_y, 0), & p_\perp &= (p_x, p_y, 0), \\ p'_\parallel &= p'_z v/v = (p'v)/v, & p'_\perp &= p' - p'_\parallel, \\ p_\parallel &= p_z v/v = (pv)/v, & p_\perp &= p - p_\parallel. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Поскольку при преобразовании Лоренца

$$p'_\perp = p_\perp,$$

3-вектор  $p'$  в штрихованной системе отсчета с помощью соотношений (1.2), (1.3) следующим образом выражается через вектор  $p$  в общем виде:

$$p' = p'_z \frac{v}{v} + p'_\perp = p - \frac{Ev}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{(pv)(1 - \sqrt{1 - v^2})}{v^2 \sqrt{1 - v^2}} v. \quad (1.4)$$

Вводя лоренц-фактор  $\gamma$  согласно формуле  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ , соотношение (1.4) можно представить в следующей компактной форме:

$$p' = p + \gamma v \left[ \frac{\gamma(pv)}{\gamma + 1} - E \right]. \quad (1.5)$$

Соответственно, для энергетической компоненты имеем

$$E' = \gamma [E - (pv)]. \quad (1.6)$$

Формулы (1.5), (1.6) позволяют проводить преобразования Лоренца с произвольно направленной скоростью  $v$ .

Используя формулы (1.2) или (1.5), (1.6), нетрудно установить, что комбинация  $E^2 - p^2$  не зависит от системы отсчета, т.е. является инвариантной относительно преобразований Лоренца:

$$(E')^2 - (p')^2 = E^2 - p^2 = \text{Inv}. \quad (1.7)$$

Инвариант (1.7) определяет квадрат массы  $m^2$ , являющейся лоренц-инвариантной характеристикой элементарной частицы:

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (1.8)$$

Энергия  $E$  физической частицы считается положительно определенной величиной ( $E > 0$ ). Согласно соотношению (1.8) в системе отсчета, где частица покоится ( $p = 0$ ), ее энергия равна массе:

$$E(p=0) = m. \quad (1.9)$$

Масса  $m$  является такой характеристикой частицы, которая остается неизменной при всех воздействиях на нее, не приводящих к превращению данной частицы в другие. В природе существуют и частицы с нулевой массой (фотоны и, возможно, нейтрино). У таких частиц энергия и модуль 3-импульса равны друг другу:  $E = |p|$  ( $m = 0$ ). В любой инерциальной системе отсчета скорость безмассовых частиц совпадает со скоростью света, так как  $v = |p|/E = 1$ .

Из формул преобразований Лоренца вытекают следующие соотношения между энергией, импульсом массивной частицы и ее наблюдаемой скоростью  $v$ :

$$E = m/\sqrt{1-v^2}, \quad p = mv/\sqrt{1-v^2}. \quad (1.10)$$

Эти формулы легко выводятся из (1.2) или (1.5), (1.6), если использовать преобразования Лоренца из системы отсчета, где частица покоится (собственная система отсчета), в систему отсчета, где она движется со скоростью  $v$  (против направления оси  $z$ )\*. Из (1.10) также вытекает, что частица, движущаяся со скоростью света ( $v = 1$ ) в любой инерциальной системе отсчета, должна обладать нулевой массой. Только в этом случае формулы (1.10) непротиворечивы. В формулах (1.2), (1.5), (1.6) фигурирует скорость  $v$  одной инерциальной системы отсчета относительно другой. Поэтому эти формулы справедливы и для случая движения частицы с нулевой массой. При этом следует лишь учесть, что  $E = |p|$ , и заме-

\*) В данном случае скорость частицы и скорость системы отсчета, в которой частица движется относительно системы отсчета, где частица покоится, совпадают по модулю и различаются знаком.

нить вектор  $p$  на величину  $En$ , где  $n$  — единичный вектор, направленный вдоль импульса безмассовой частицы.

Соотношение (1.7) является частным случаем скалярного произведения двух 4-векторов, которое в пространстве Минковского определяется следующим образом:

$$(pk) = g_{ik} p_i k_j = E\omega - (pk), \quad (1.11)$$

где  $p = (E, p)$ ,  $k = (\omega, k)$ ,  $g_{ik}$  — метрический тензор пространства Минковского, определенный ранее. В формуле (1.11) по повторяющимся парам индексов подразумевается суммирование. В дальнейшем, чтобы не усложнять кинематические формулы излишними индексами, примем в качестве определения следующее из (1.11) правило конструирования скалярных произведений двух 4-векторов: в скалярном произведении 4-векторов  $p$  и  $k$  произведение временных (энергетических) компонент суммируется с положительным знаком, а пространственных — с отрицательным.

Скалярное произведение (1.11) по определению релятивистски инвариантно, т.е. остается неизменным при преобразованиях Лоренца:

$$(pk) = E\omega - (pk) = E'\omega' - (p'k') = \text{Inv}. \quad (1.12)$$

В справедливости (1.12) легко убедиться непосредственным вычислением, используя формулы (1.2) или (1.5), (1.6) в нештрихованной системе.

Использование релятивистских инвариантов, составленных из 4-импульсов частиц, участвующих в процессе взаимодействия, позволяет описать характеристики процесса наиболее общим образом. Метод инвариантов — наиболее универсальный способ записи экспериментальной информации и теоретических предсказаний кинематических характеристик частиц, участвующих в различных физических процессах. Например, инвариант  $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$ , составленный на основе измеренных 4-импульсов  $p_1$  и  $p_2$  двух частиц, образовавшихся наряду с другими частицами в результате процесса взаимодействия, характеризует эффективную массу системы этих частиц. Действительно, если перейти в систему отсчета, где суммарный импульс  $p_1 + p_2 = 0$  (центр масс системы), то инвариант  $s_{12} = (E_1 + E_2)^2$  можно трактовать как квадрат внутренней энергии системы, состоящей из двух рассматриваемых частиц. В случае покоящейся одиночной частицы эта величина равна квадрату ее массы. Аналогия очевидна. Более того, если статистика событий свидетельствует о том, что инвариант  $s_{12}$  принимает преимущественно значения в ограниченной области, существенно меньшей кинематически допустимой, то вывод о вторичном происхождении этой пары частиц в результате распада какой-то частицы с массой  $\sqrt{s_{12}}$  напрашивается в качестве основной гипотезы о механизме наблюдаемой реакции. Сделанное замечание справедливо и для систем, состоящих из любого числа частиц.

Инвариант  $t = (p_1 - p_2)^2$ , где 4-импульс  $p_1$  характеризует первичную частицу, а  $p_2$  — вторичную, дает информацию о передаче энергии и импульса от первичной частицы к вторичной в форме, независимой от конкретной системы отсчета, в которой проводилось наблюдение.



Инварианты позволяют часто наиболее простым образом устанавливать связи между кинематическими характеристиками первичных и вторичных частиц, следующие из законов сохранения энергии и импульса. Примеры применения инвариантов широко используются в данной книге.

### 1.3. Системы отсчета

Реакции взаимодействия элементарных частиц изучают в выбранных системах отсчета. Это связано часто с особенностями экспериментальных установок и с теоретическими удобствами описания процесса взаимодействия. Ограничимся здесь обсуждением трех наиболее часто используемых систем отсчета.

**Лабораторная система (Л-система).** Эта система отсчета отвечает стандартной постановке экспериментов на ускорителях, когда пучок частиц сорта  $A$  налетает на неподвижную мишень, состоящую из частиц сорта  $B$  (протоны водорода, атомные ядра, атомные электроны), в Л-системе 4-импульсы взаимодействующих первичных частиц имеют следующие компоненты:

$$p_A = (E_A, \mathbf{p}_A), \quad p_B = (m_B, 0), \quad (1.13)$$

где  $E_A, \mathbf{p}_A$  — энергия и 3-вектор импульса частицы  $A$ ,  $E_A = (\mathbf{p}_A^2 + m_A^2)^{1/2}$ ,  $m_{A,B}$  — массы частиц  $A$  и  $B$ . Скорость частицы  $A$  равна  $v_A = \mathbf{p}_A/E_A$ , а частица  $B$  покоится:  $v_B = 0$  ( $\mathbf{p}_B = 0$ ).

**Антилабораторная система (АЛ-система).** Эта система отсчета отвечает покоящейся частице  $A$ , на которую налетает частица  $B$  со скоростью  $v_B$ . Если частица  $A$  стабильная (протон, атомное ядро, электрон), то АЛ-систему можно реализовать практически и в таком случае она ничем качественно не отличается от Л-системы. Если же частица нестабильная, то практически изготовить мишень, состоящую из таких частиц, невозможно. В этом случае изучение процесса в АЛ-системе проводится только на теоретическом уровне. Очевидно, что для частиц  $A$  с нулевой массой ( $m_A = 0$ ) АЛ-системы вообще не существует.

В АЛ-системе 4-импульсы первичных взаимодействующих частиц  $A$  и  $B$  имеют следующие компоненты:

$$p_A = (m_A, 0), \quad p_B = (E'_B, \mathbf{p}'_B), \quad (1.14)$$

где  $E'_B, \mathbf{p}'_B$  — энергия и 3-импульс частицы  $B$ ,  $E'_B = [m_B^2 + (\mathbf{p}'_B)^2]^{1/2}$ . Скорость АЛ-системы относительно Л-системы равна с обратным знаком скорости частицы  $A$  в Л-системе:  $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_A$ . Согласно формулам релятивистского преобразования (1.2) или (1.5), (1.6) энергия и импульс частицы  $B$  в АЛ-системе выражаются через энергию и импульс частицы  $A$  в Л-системе следующим образом:

$$E'_B = m_B / \sqrt{1 - v_A^2} = m_B E_A / m_A, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{p}'_B = -m_B \mathbf{v}_A / \sqrt{1 - v_A^2} = -m_B \mathbf{p}_A / m_A.$$

Физически АЛ-система и Л-система в случае массивных частиц совершенно эквивалентны и оказываются удобными для изучения процесса взаимодействия в тех случаях, когда некоторые продукты реакции взаимодействия частиц  $A$  и  $B$  оказываются связанными (скоррелированными) по своим квантовым числам и кинематическим характеристикам с частицей  $A$  (удоб-

на Л-система) или  $B$  (удобна АЛ-система). Такие продукты принято называть фрагментами частиц  $A$  или  $B$ .

**Система центра масс (Ц-система).** Эта система отсчета определяется соотношением (рис. 1.1)

$$\mathbf{p}_A^* + \mathbf{p}_B^* = 0, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{p}_A^*, \mathbf{p}_B^*$  — 3-импульсы частиц  $A$  и  $B$  в Ц-системе. Согласно (1.16) сталкивающиеся частицы в этом случае имеют равные по модулю, но противоположные направленные импульсы. Ц-система может быть практически реализована при постановке экспериментов на встречных пучках. В существующих ускорителях встречные пучки ( $pp, \bar{p}p, ee, e^+e^-$ ) направлены не



Рис. 1.1. Конфигурация импульсов сталкивающихся частиц в Ц-системе

строго друг против друга, а пересекаются под небольшим углом. При обработке результатов таких экспериментов все кинематические характеристики частиц с помощью преобразований Лоренца переводятся в Ц-систему, где и проводится анализ данных. Если же опыт выполнен в Л-системе (кольцевые ускорители), то часто для удобства теоретического анализа все кинематические характеристики переводят в Ц-систему, где кинематическая картина реакции взаимодействия выглядит, как правило, более симметрично. Эта симметрия проявляется особенно при соударении одинаковых частиц или частицы с соответствующей ей античастицей. При соударении двух частиц с произвольными  $\mathbf{p}_A$  и  $\mathbf{p}_B$  переход в Ц-систему осуществляется посредством преобразования Лоренца с соответствующей скоростью

$$\mathbf{v}_c = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) / (E_A + E_B). \quad (1.17)$$

Действительно, если направить ось  $z$  по направлению суммы импульсов  $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}$ , то в новой (помеченной звездочкой) системе отсчета суммарный вектор, согласно формулам релятивистских преобразований (1.2) или (1.5), составит

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - E \mathbf{v}_c / \sqrt{1 - v_c^2}, \quad E = E_A + E_B.$$

Приравняв вектор  $\mathbf{p}^*$  нулю, находим скорость  $\mathbf{v}_c$  Ц-системы относительно той системы отсчета, где  $\mathbf{p} \neq 0$ :  $\mathbf{v}_c = \mathbf{p} / E$ . Этот результат совпадает с формулой (1.17). В Л-системе, согласно принятому выше определению,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A$ ,  $E = E_A + m_B$ . Поэтому скорость Ц-системы относительно Л-системы есть

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{p}_A / (E_A + m_B). \quad (1.18)$$

Энергии и импульсы частиц  $A$  и  $B$  в Ц-системе следующим образом выражаются через соответствующие величины в Л-системе (см. (1.2), (1.5), (1.6)):

$$E_B^* = \frac{m_B}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad E_A^* = \frac{E_A - (\mathbf{p}_A \mathbf{v}_c)}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{p}_B^* = -\frac{m_B \mathbf{v}_c}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad \mathbf{p}_A^* = \frac{\mathbf{p}_A - E_A \mathbf{v}_c}{\sqrt{1 - v_c^2}}.$$

С учетом формулы (1.18) соотношения (1.19) можно представить в следующей форме:

$$E_B^* = \frac{m_A(E_A + m_B)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}, \quad E_A^* = \frac{m_A^2 + m_B E_A}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}, \quad (1.20)$$

$$p_B^* = -p_A^* = -\frac{m_B p_A}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}.$$

Для полноты выпишем здесь также формулы, выражающие энергию и

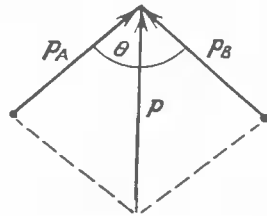


Рис. 1.2. Конфигурация импульсов встречных пучков, пересекающихся под углом  $\theta$

импульс частиц в Л-системе через соответствующие характеристики в Ц-системе:

$$E_A = \frac{E_A^* + (p_A^* v_c)}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad p_A = \frac{p_A^* + E_A^* v_c}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad (1.21)$$

$$E_B = \frac{E_B^* + (p_B^* v_c)}{\sqrt{1 - v_c^2}}, \quad p_B = \frac{p_B^* + E_B^* v_c}{\sqrt{1 - v_c^2}}.$$

Нетрудно проверить, используя (1.18) и (1.19), что  $E_B = m_B$ ,  $p_B = 0$ , как и должно быть. Изменение знака перед вторыми слагаемыми в числителях правых частей соотношений (1.21) связано с тем, что скорость Л-системы относительно Ц-системы направлена в обратную сторону по сравнению с  $v_c$ .

Исходя из данных о соответствующих характеристиках сталкивающихся частиц в произвольной инерциальной системе можно с помощью формулы (1.17) осуществлять переход к кинематическим переменным Ц-системы. В частности, с помощью (1.17) можно осуществить релятивистское преобразование системы пересекающихся под углом  $\theta$  встречных пучков в Ц-систему (рис. 1.2). Направление вектора  $v_c$  в данном случае легко находится геометрическим путем по правилу параллелограмма (суммарный вектор  $p = p_A + p_B$  на рис. 1.2). При равных по модулю импульсах частиц  $A$  и  $B$  ( $|p_A| = |p_B|$ ) суммарный импульс  $p$  по модулю составляет  $|p| = 2|p_A| \sin(\theta/2)$ . Следовательно, модуль скорости преобразования в Ц-систему

$$|v_c| = |v_A| \sin(\theta/2), \quad v_A = p_A/E_A. \quad (1.22)$$

При выводе (1.22) для простоты считалось, что массы частиц  $A$  и  $B$  равны и, соответственно,  $E_A = E_B$ . Конкретные формулы, позволяющие в данном

случае выразить переменные  $E_A^*$ ,  $p_A^*$ ,  $E_B^*$ ,  $p_B^*$  в Ц-системе, через энергии и импульсы пересекающихся встречных пучков, можно получить на основе общих формул (1.5) и (1.6), подставив в них вместо  $v$  скорость  $v_c$  (1.17), а вместо лоренц-фактора  $\gamma$  — величину  $\gamma_c = (1 - v_c^2)^{-1/2}$ . При такой операции штрихованные переменные относятся к Ц-системе, а нештрихованные — к системе пересекающихся встречных пучков.

Предоставляем читателю провести соответствующие несложные, но громоздкие выкладки самостоятельно. Приведем здесь лишь ответ для импульса одной из частиц в Ц-системе:

$$|p_A^*| = |p_A| \cos(\theta/2).$$

Эта формула справедлива при условиях  $|p_A| = |p_B|$ ,  $m_A = m_B$ .

#### 1.4. Кинематические переменные в реакциях взаимодействия и распада. Законы сохранения энергии и импульса

Реакции взаимодействия двух элементарных частиц  $A$  и  $B$  можно разделить на упругие, квазиупругие и неупругие. Под реакцией упругого рассеяния подразумевается процесс взаимодействия



в котором сорт частиц не изменяется и не происходит образования новых частиц. В процессе упругого рассеяния изменяются лишь импульсы частиц  $A$  и  $B$ . В процессе квазиупругого взаимодействия частиц  $A$  и  $B$  в конечном состоянии образуются, так же как и при упругом рассеянии, две частицы, но их сорт отличается от сорта частиц  $A$  и  $B$ :



Возможна и такая ситуация, когда сорт одной из вторичных частиц совпадает с сортом первичной. Самую большую группу процессов образуют реакции неупругого взаимодействия



В результате которых образуется более двух частиц. Число вторичных частиц при современных энергиях ускорителей может достигать нескольких десятков и даже нескольких сотен.

Кинематическое состояние каждой частицы, участвующей в реакции, задается тремя компонентами ее 3-вектора импульса  $p$ . Энергия каждой частицы, если известен ее сорт, выражается на основе соотношения (1.8).

Процесс распада нестабильной частицы



отличается от процессов взаимодействия (1.23) — (1.25) с кинематической точки зрения тем, что в начальном состоянии здесь имеется только одна частица. В результате процесса распада (1.26) имеется, как минимум, две частицы в конечном состоянии.

В природе осуществляются лишь такие типы процессов (1.23) — (1.26), которые не противоречат законам сохранения энергии и импульса, а также целому ряду других законов сохранения (момента импульса и его проекции, электрического заряда, изотопического спина в сильных взаимодействиях, барионного и лептонного заряда, четности в сильных и электро-

магнитных взаимодействиях и др.). С точки зрения кинематики главную роль играют законы сохранения энергии и импульса, которые являются следствиями однородности времени и пространства в 4-мерном мире Минковского. Эти законы сохранения выполняются в произвольной инерциальной системе отсчета и в 4-мерном виде представляются единой формулой:

$$\sum_i p_i = \sum_f p_f, \quad (1.27)$$

где  $p_i$  — 4-импульсы первичных частиц, а  $p_f$  — вторичных. Индексы  $i$  и  $f$  здесь нумеруют первичные и вторичные частицы, а не компоненты 4-векторов. В развернутой форме (1.27) записывается в виде четырех законов сохранения — энергии и трех компонент импульса:

$$\sum_i E_i = \sum_f E_f, \quad \sum_i p_i = \sum_f p_f. \quad (1.28)$$

Суммирование в (1.27), (1.28) ведется по всем первичным частицам (в левой части равенств) и по всем вторичным (в правой части).

Кинематические соотношения, характеризующие реакции взаимодействия и распада, являются следствиями законов сохранения (1.27), (1.28). Ограничения, налагаемые этими законами на кинематические характеристики вторичных частиц, часто оказываются весьма своеобразными, что усиливает роль кинематики при анализе процессов взаимодействия элементарных частиц. Не следует думать, что действие других законов сохранения является не столь существенным. Эти законы также ограничивают и даже запрещают многие процессы взаимодействия частиц. Однако они практически не влияют, если не учитывать динамику, на кинематические характеристики вторичных частиц.

Обсудим теперь вопрос о том, сколько независимых кинематических переменных характеризуют кинематические состояния частиц, участвующих в процессах взаимодействия и распада. Состояние отдельной свободной частицы характеризуется в квантовой механике тремя проекциями ее импульса. Другие характеристики состояния, такие, как спин, заряд и тому подобные, нас сейчас не интересуют. Рассмотрим сначала процесс превращения двух начальных частиц в  $n$  конечных. Для кинематического описания  $n+2$  частиц требуется указать  $3(n+2)$  компонент их импульсов. Законы сохранения энергии и импульса устанавливают 4 соотношения между компонентами импульсов первичных и вторичных частиц. В силу требований теории относительности рассмотрение процесса можно провести в произвольной инерциальной системе отсчета. Выбор Ц-системы в качестве системы отсчета позволяет наложить три условия на компоненты импульсов первичных частиц,  $p_A^* + p_B^* = 0$  и три условия  $\sum_f p_f^* = 0$ ,

на компоненты импульсов вторичных частиц. Следовательно, процесс взаимодействия характеризуется  $3(n+2) - 4 - 6 = 3n - 4$  независимыми кинематическими переменными. Зависимость распределений вторичных частиц от этих переменных определяется, в принципе, динамикой процесса. В дальнейшем будем называть эти переменные существенными. Образуя скалярные произведения из различных пар 4-импульсов первичных и вторичных частиц, можно выбрать все независимые кинематические переменные в инвариантном виде. Например, в случае процессов упругого и квазиупругого взаимодействия (1.23), (1.24) число независимых переменных

равно  $3 \cdot 2 - 4 = 2$ . Эти две переменные можно выбрать в следующей инвариантной форме:

$$s = (p_A + p_B)^2, \quad t = (p_A - p_C)^2.$$

В процессах взаимодействия, рассматриваемых в Ц-системе (или в Л-системе), имеется выделенное направление в пространстве — ось соударения сталкивающихся частиц (направление движения налетающей на покоящуюся мишень частицы). Благодаря цилиндрической (азимутальной) симметрии задачи конфигурация импульсов вторичных частиц как целое может равновероятно занимать в пространстве любое положение, отвечающее ее вращению вокруг оси соударения\*). Такое вращение характеризуется азимутальным углом  $\varphi$ . Поскольку распределение событий по этой переменной не зависит от динамики взаимодействия, такая переменная называется несущественной или тривиальной. Эта переменная не входит в число  $3n - 4$  существенных переменных. Она была исключена ранее из рассмотрения, так как направление оси соударения в Ц-системе выбиралось совершенно произвольно. На практике это направление фиксируется условиями эксперимента и в процессе измерения угловых распределений вторичных частиц проще проводить отсчет азимутальных углов от фиксированного направления, перпендикулярного оси соударения, чем совмещать в пространстве одинаковые импульсные конфигурации.

В случае процессов распада (1.26) вопрос о количестве существенных и тривиальных независимых переменных удобно рассматривать в системе покоя нестабильной частицы. При этом начальное состояние характеризуется фиксированными значениями энергии и импульса:  $E_A = m_A$ ,  $p_A = 0$ . Конечные состояния описываются  $3n$  кинематическими переменными (по числу компонент 3-импульсов вторичных частиц), из которых законы сохранения энергии и импульса оставляют независимыми лишь  $3n - 4$ . При этом ориентация конфигурации импульсов вторичных частиц как целого в пространстве не зависит от динамики и может быть произвольной. Это означает, что из  $3n - 4$  независимых переменных три являются тривиальными, а  $3n - 7$  — существенными ( $n \geq 3$ ). В случае двухчастичного распада ( $n = 2$ ) существенных кинематических переменных вообще нет, а тривиальных переменных всего две. Это полярный и азимутальный углы ( $\theta$  и  $\varphi$ ), характеризующие ориентацию в пространстве импульса одной из вторичных частиц в системе покоя распадающейся частицы. Распределение событий по этим тривиальным переменным изотропно. Отметим, что в двухчастичном распаде все кинематические инварианты выражаются через массы участвующих частиц, что лишний раз свидетельствует об отсутствии существенных переменных.

## 1.5. Фазовый объем. Вероятность распада и сечение процесса

**Фазовый объем.** Фазовым пространством называется совокупность импульсных и конфигурационных (координатных) пространств всех частиц физической системы [8]. Элемент объема шестимерного фазового пространства одной частицы есть  $d^3p d^3x = d^3p dV$ , где  $dV$  — элемент

\*) Здесь и далее поляризация частиц не учитывается.

объема конфигурационного пространства. В квантовой теории доказывалось [2], что число квантовых состояний свободной частицы в элементе объема ее фазового пространства составляет

$$dN = d^3 p dV / (2\pi\hbar)^3 = d^3 p dV / (2\pi)^3.$$

Естественно, что вероятность образования квантовой частицы пропорциональна числу квантовых состояний, в которых она может находиться. В свою очередь, вероятность образования в результате взаимодействия некоторого числа частиц пропорциональна произведению их фазовых объемов, деленному на  $(2\pi)^{3n}$ , где  $n$  — число вторичных частиц. На опыте вторичные частицы наблюдаются на далеких расстояниях от области их взаимодействия. В таких условиях они являются практически свободными и их координатные волновые функции являются плоскими волнами, отвечающими состояниям частиц с определенными импульсами [2]. Нормировка волновых функций таких состояний проводится на объем  $V$ , в котором находятся частицы. При этом нормировочный множитель оказывается равным  $V^{-1/2}$ . Поскольку вероятность образования частицы пропорциональна квадрату модуля ее волновой функции, то объем конфигурационного пространства  $V = \int dV$ , входящий в определение фазового объема, всегда сокращается в формуле для вероятности с таким же объемом  $V$ , возникающим в знаменателе, благодаря нормировке волновой функции. В результате в выражение для вероятности процесса входят лишь произведения элементов объема импульсных пространств вторичных частиц. Это произведение совместно с четырехмерной  $\delta$ -функцией, отражающей законы сохранения энергии и импульса, принято называть элементом фазового объема вторичных частиц:

$$d\Phi = \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right). \quad (1.29)$$

Множитель  $(2\pi)^4$  перед  $\delta$ -функцией здесь введен произвольно (сравните с (1.33), (1.34)). В формуле (1.29) индекс  $i$  нумерует частицы в начальном состоянии, а индекс  $f$  — в конечном. В релятивистском случае волновые функции свободных частиц содержат также нормированный множитель  $(2E)^{-1/2}$ , каждый из которых, будучи возведенным в квадрат, также фигурирует в выражении для вероятности квантового перехода [9]. Как и элемент фазового объема (1.29), эти множители появляются в выражении для вероятности перехода независимо от конкретной динамики процесса. Поэтому вместо релятивистски неинвариантного фазового объема (1.29) рассматривают элемент релятивистски инвариантного фазового объема вторичных частиц

$$dF = \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right). \quad (1.30)$$

Величина  $dF$  релятивистски инвариантна, поскольку инвариантна четырехмерная  $\delta$ -функция [9]:

$$\delta^{(4)} \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right) = \delta \left( \sum_i E_i - \sum_f E_f \right) \delta^{(3)} \left( \sum_i \mathbf{p}_i - \sum_f \mathbf{p}_f \right),$$

а элемент объема в импульсном пространстве, деленный на  $2E_f$ , можно представить в явно инвариантной форме:

$$d^3 p_f / 2E_f = \int d^4 p_f \delta(p_f^2 - m_f^2). \quad (1.31)$$

При выводе (1.31) учтено, что  $E_f = (m_f^2 + \mathbf{p}_f^2)^{1/2}$ , а также следующее соотношение:

$$\int \delta[f(x)] dx = 1/|f'(x)|_{x=x_0}, \quad (1.32)$$

где  $f'(x)$  есть производная по  $x$  от функции  $f(x)$ , являющейся аргументом  $\delta$ -функции; значение  $f'(x)$  в (1.32) берется в точке  $x = x_0$ , где  $f(x_0) = 0$ . Если функция  $f(x)$  в области интегрирования по  $x$  имеет несколько корней, то в правой части равенства (1.32) учитывается вклад всех таких корней. Формула (1.32) легко выводится с помощью простой замены переменной:  $y = f(x)$ . В выражении (1.31) интегрирование по переменной  $p_{f_0}$  (энергетическая компонента 4-вектора  $p_f$ ) проводится в области положительных значений:  $p_{f_0} \geq 0$ .

**Вероятность распада.** Формула для вычисления вероятности распада нестабильной частицы  $A$  в единицу времени в произвольной системе отсчета представлена выражением [9]

$$dw = [2E_A (2S_A + 1)]^{-1} \sum_{S_A, S_f} |M|^2 \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} (p_A - \sum_f p_f). \quad (1.33)$$

Соотношение (1.33) есть дифференциальная вероятность распада в единицу времени частицы  $A$ , обладающей энергией  $E_A$ , на несколько вторичных частиц с 3-импульсами в интервалах  $p_f, p_f + dp_f$ . В формуле (1.33) величина  $|M|^2$  есть квадрат модуля инвариантной амплитуды распада, которая определяется динамикой процесса;  $S_A$  — спиновое квантовое число нестабильной частицы; в (1.33) проведено суммирование по спиновым состояниям нестабильной частицы  $A$  и вторичных частиц ( $S_f$ );  $p_A$  — 4-импульс частицы  $A$ . За исключением множителя  $2E_A^{-1}$  в правой части (1.33), все множители образуют релятивистски инвариантные выражения. Наличие множителя  $E_A^{-1}$  в выражении для вероятности (1.33) отражает эффект уменьшения вероятности распада при увеличении скорости нестабильной частицы. Полная вероятность распада нестабильной частицы за единицу времени находится интегрированием (1.33) по всем импульсам вторичных частиц. Если имеется несколько способов (каналов) распада, то вероятности распадов по каждому каналу следует просуммировать.

Полная вероятность распада в единицу времени  $W_{\text{tot}}$  связана с временем жизни  $\tau$  нестабильной частицы следующим соотношением:  $\tau = W_{\text{tot}}^{-1}$ . Время жизни  $\tau$  определяет интервал времени, в течение которого число нераспавшихся нестабильных частиц уменьшается в  $e$  раз. Время жизни покоящейся нестабильной частицы  $\tau_0$  является физической характеристикой элементарной частицы и приводится в таблицах свойств элементарных частиц [10]. В системе отсчета, где нестабильная частица движется с энергией  $E_A$ , время жизни возрастает в  $E_A/m_A$  раз по сравнению с  $\tau_0$ . Этот вывод следует из предыдущего анализа формулы (1.33); он отражает известный эффект теории относительности — растяжение времени [1].



Отметим также, что после суммирования по спиновым переменным величина  $\sum_{S_A, S_f} |M|^2$  зависит только от существенных кинематических переменных, записанных в инвариантной форме [9].

Сечение процесса. Дифференциальное сечение процесса взаимодействия частиц  $A$  и  $B$  с образованием в конечном состоянии произвольного числа вторичных частиц с 3-импульсами в интервалах от  $p_f$  от  $p_f + dp_f$  подсчитывается по формуле [9]

$$d\sigma = [(2S_A + 1)(2S_B + 1) 4j]^{-1} \times \sum_{S_i, S_f} |M|^2 \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f p_f). \quad (1.34)$$

В (1.34)  $S_i = \{S_A, S_B\}$  — спиновые квантовые числа первичных частиц,  $S_f$  — спиновые квантовые числа вторичных частиц;  $|M|^2$  — квадрат модуля инвариантной амплитуды процесса, который в формуле (1.34) усредняется по спиновым состояниям первичных частиц, и суммируется по спиновым состояниям вторичных частиц; после этой операции величина  $\sum_{S_i, S_f} |M|^2$  зависит только от существенных кинематических переменных.

Величина  $j$  называется инвариантным потоком:

$$j = [(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2]^{1/2}. \quad (1.35)$$

Остальные обозначения определены в соотношении (1.33).

Как известно, сечение процесса характеризует число соответствующих реакций, происходящих в единицу времени в единице объема при единичной плотности потока падающих частиц и единичной плотности частиц-мишеней. Это определение относится к Л-системе, но само понятие сечения, как видно из (1.34), можно определить релятивистски инвариантно. Сечение — количественная мера процессов взаимодействия.

Как видно из формул (1.33), (1.34), дифференциальная вероятность распада в единицу времени и дифференциальное сечение процесса взаимодействия определяются, за исключением величины  $|M|^2$ , релятивистски инвариантным фазовым объемом  $dF$  и несколькими известными множителями.

Статистический подход к проблеме, о котором упоминалось в разделе 1.1, состоит в том, чтобы упростить формулы (1.33), (1.34), полагая величину  $|M|^2$  постоянной. Эта простейшая гипотеза позволяет, в принципе, оценить импульсно-угловые распределения вторичных частиц, не конкретизируя динамику процесса, но учитывая законы сохранения энергии и импульса.

Сравнение предсказаний, сделанных в рамках статистической гипотезы, с данными опыта позволяет судить о том, какие из наблюдаемых эффектов в распределениях вторичных частиц связаны с кинематикой процесса, а какие являются отражением динамики взаимодействия между частицами [6].

По существу, статистическая гипотеза соответствует таким механизмам образования вторичных частиц, в которых отсутствуют динамические корреляции между 4-импульсами этих частиц, а также между 4-импульсами

начальных и конечных частиц. Отсутствие корреляций означает, что образование вторичных частиц происходит независимо друг от друга и от состояний первичных частиц. В таких условиях наблюдаемые корреляции определяются только законами сохранения энергии и импульса, а распределения частиц по кинематическим переменным — релятивистски инвариантным фазовым объемом. Вычисление таких распределений входит в сферу кинематики.

## 1.6. Резонансы и нерезонансный фон

Среди сильно взаимодействующих элементарных частиц (адронов) большинство являются так называемыми резонансами. Резонанс — это нестабильная частица, которая в собственной системе отсчета в результате процессов сильного взаимодействия распадается на более легкие адроны в среднем за время, необходимое для того, чтобы релятивистская частица пролетела расстояние порядка размеров адрона ( $10^{-13}$  см), которое по порядку величины совпадает с радиусом действия ядерных сил. Это время порядка  $10^{-23} - 10^{-24}$  с. Время жизни нестабильных частиц, распадающихся в результате электромагнитных или слабых взаимодействий на много порядков больше. Такие частицы помещаются обычно в графу "Стабильные частицы" таблиц свойств элементарных частиц [10]. При этом имеется в виду их большое время жизни по сравнению с резонансами. Кроме очень малого времени жизни, величина которого не позволяет регистрировать следы резонансов в трековых детекторах, эти образования обладают всеми качествами, которые присущи частицам, относящимся к разряду стабильных (конечно, относительно распадов по сильному взаимодействию). Они обладают определенным спином, зарядом, изотопическим спином, барионным зарядом и другими внутренними квантовыми числами, присущими элементарным частицам. Указанное выше различие во временах жизни "стабильных" частиц и резонансов приводит к тому, что массу резонанса в силу принципа неопределенности энергия-время [2] нельзя измерить точно.

Из принципа неопределенности следует, что ширина профиля энергии нестационарного состояния  $\Gamma$  связана с временем жизни этого состояния  $\tau_0$  соотношением

$$\Gamma \tau_0 \sim 1. \quad (1.36)$$

Таким образом, масса резонанса  $M$  может быть определена лишь с точностью до величины  $\Gamma$ . Величину  $\Gamma$  называют шириной резонансного состояния. Ширина большинства адронных резонансов составляет от 10 до 100–200 МэВ. Отмеченная неопределенность в массе резонанса приводит к тому, что при восстановлении его массы по кинематическим характеристикам продуктов его распада наблюдается максимум в распределении событий распада резонанса по эффективной массе продуктов распада. В отсутствие фоновых (не связанных с распадом резонанса) событий наблюдаемое распределение по полной энергии  $E^*$  продуктов распада резонанса в системе центра инерции этих продуктов имеет в идеальном случае форму распределения Брейта-Вигнера [2]:

$$dN/dE^* \sim [(E^* - M_0)^2 + \Gamma^2/4]^{-1}. \quad (1.37)$$

В формуле (1.37)  $M_0$  — положение максимума,  $\Gamma$  — ширина резонансной кривой, измеренная между точками с амплитудами, составляющими половину амплитуды в точке максимума.

Формула (1.37) справедлива лишь в системе отсчета, связанной с резонансом. В этой системе отсчета суммарная полная энергия  $E^*$  продуктов распада совпадает с эффективной массой этих продуктов, т.е. с неопределенной массой  $M$  нестабильного резонансного состояния. Формулу (1.37) можно представить в релятивистски инвариантной форме, которая является более общей, чем (1.37):

$$dN/dM^2 \sim [(M^2 - M_0^2)^2 + (M_0 \Gamma)^2]^{-1}, \quad (1.38)$$

где  $M^2 = (\sum p_f)^2 = (E^*)^2$ ,  $p_f$  — 4-импульсы продуктов распада, а суммирование ведется по всем продуктам распада. Формула (1.38) по характеру зависимости от  $M$  переходит в районе максимума ( $|M - M_0| \leq \Gamma$ ) в формулу (1.37), если использовать следующие приближенные соотношения:

$$M^2 - M_0^2 \approx 2M_0(M - M_0), \quad dM^2 \sim 2M_0 dM,$$

и учесть, что  $E^* = M$ .

Поиски и идентификация адронных резонансов были в 60-е годы основным направлением физики элементарных частиц. Значительный интерес к проблеме спектроскопии адронов сохранился и поныне в связи с проблемами обнаружения и идентификации резонансов, в состав которых входят очарованные, прелестные и другие тяжелые кварки. Поэтому проблема поиска резонансных пиков по эффективной массе на фоне нерезонансных событий по-прежнему остается весьма актуальной. Методы экспериментальной идентификации резонансов в значительной степени опираются на результаты расчетов спектров групп вторичных частиц по их эффективной массе, которые проводятся на основе статистической гипотезы. Как показывает накопленный богатый опыт, найденные таким способом распределения по эффективным массам групп вторичных частиц, как правило, хорошо воспроизводят спектр фоновых событий или, по крайней мере, позволяют заранее оценить возможности экспериментальной установки в решении проблем, возникающих в физике резонансов. Методика аналитических и численных расчетов по статистической гипотезе, т.е. на основе формулы (1.30), детально описана в прекрасной монографии Г.И. Копылова [6], которую мы рекомендуем читателям, интересующимся этими вопросами. Некоторые полезные методы расчетов можно найти в книге [7], где детально рассмотрены также периферические процессы.

Здесь мы рассмотрим лишь простейшие примеры вычисления двухчастичного фазового объема, распределения по эффективной массе двух частиц в трехчастичной системе, а также общую формулу для вычисления распределения по эффективной массе  $k$  частиц в системе  $n$  частиц. В последнем случае получение конкретных результатов требует проведения численного интегрирования.

**Двухчастичный фазовый объем.** Согласно формуле (1.30) элемент двухчастичного релятивистски инвариантного фазового объема пропорционален следующему выражению:

$$dF_2 \sim E_1^{-1} d^3 p_1 E_2^{-1} d^3 p_2 \delta^{(4)}(p - p_1 - p_2). \quad (1.39)$$

Числовые коэффициенты в (1.39) опущены, так как они не играют роли при проведении интегрирований и при желании могут быть всегда конкретизированы. В (1.39)  $p$  — 4-импульс начального состояния. В случае процесса распада  $p^2 = m^2$ ,  $m$  — масса нестабильной частицы; в случае процесса соударения двух частиц  $p^2 = s$  — квадрат полной энергии первичных частиц в связанной с ними Ц-системе. Мы будем полагать далее:  $p^2 = s$ ,  $p_1, p_2$  — 4-импульсы вторичных частиц,  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ ,  $p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ . Вычисление интегралов по компонентам импульсов вторичных частиц в (1.39) в силу релятивистской инвариантности этого выражения можно выполнить в произвольной инерциальной системе отсчета. Наиболее удобно это сделать в Ц-системе частиц 1 и 2, где  $\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$ ,  $E_1^* + E_2^* = \sqrt{s}$ . Интеграл по  $d^3 p_2^*$  вычисляется автоматически с помощью  $\delta^{(3)}$ -функции, аргумент которой отражает закон сохранения импульса системы:

$$dF_2 \sim (E_1^* E_2^*)^{-1} d^3 p_1^* \delta(\sqrt{s} - E_1^* - E_2^*).$$

В этой формуле

$$E_2^* = (m_2^2 + (\mathbf{p}_1^*)^2)^{1/2} = [m_2^2 + (\mathbf{p}_1^*)^2]^{1/2} = [(E_1^*)^2 + m_2^2 - m_1^2]^{1/2};$$

$m_1, m_2$  — массы вторичных частиц. Элемент  $d^3 p_1^*$  в сферических координатах,

$$p_1^* = (|p_1^*| \sin \theta_1^* \cos \varphi_1^*, |p_1^*| \sin \theta_1^* \sin \varphi_1^*, |p_1^*| \cos \theta_1^*),$$

имеет вид

$$d^3 p_1^* = |p_1^*|^2 d|p_1^*| d\cos \theta_1^* d\varphi_1^* = |p_1^*| E_1^* dE_1^* d\Omega_1^*,$$

где  $d\Omega_1^* = d\cos \theta_1^* d\varphi_1^*$  — элемент телесного угла вылета частицы 1 в Ц-системе. Переход к энергетической переменной  $E_1^*$  осуществлен на основе соотношения  $(E_1^*)^2 = m_1^2 + (\mathbf{p}_1^*)^2$ . В результате указанных преобразований находим

$$dF_2 \sim (E_2^*)^{-1} |p_1^*| dE_1^* d\Omega_1^* \delta(\sqrt{s} - E_1^* - E_2^*).$$

Интегрирование по  $dE_1^*$  выполняется с помощью  $\delta$ -функции с учетом (1.32):

$$dF_2 \sim |p_1^*| [E_2^*] \partial(E_1^* + E_2^*) / \partial E_1^* d\Omega_1^*.$$

В последней формуле в качестве  $E_1^*$  везде следует подставить корень уравнения

$$E_1^* + [(E_1^*)^2 + m_1^2 - m_2^2]^{1/2} = \sqrt{s},$$

который равен

$$E_1^* = (s + m_1^2 - m_2^2) / 2\sqrt{s},$$

$$E_2^* = [(E_1^*)^2 + m_1^2 - m_2^2]^{1/2} = (s + m_2^2 - m_1^2) / 2\sqrt{s}, \quad (1.40)$$

$$|p_1^*| = [s - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s - (m_1 - m_2)^2]^{1/2} / 2\sqrt{s}.$$

После выполнения указанных подстановок, получаем

$$dF_2 \sim \frac{|p_1^*| d\Omega_1^*}{E_1^* + E_2^*} = \frac{1}{2s} [s - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s - (m_1 - m_2)^2]^{1/2} d\Omega_1^*.$$

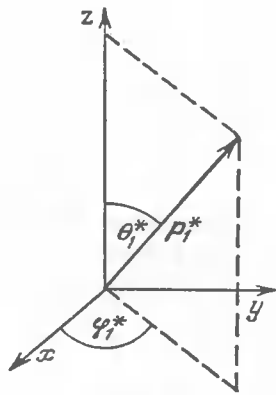


Рис. 1.3. Сферические координаты  $(\theta_1^*, \varphi_1^*)$  вектора  $p_1^*$

Интегрирование по полярному  $\theta_1^*$  и азимутальному  $\varphi_1^*$  углам в Ц-системе проводится в пределах  $0 \leq \theta_1^* \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi_1^* \leq 2\pi$ , которые соответствуют геометрическим ограничениям, налагаемым на эти переменные (рис. 1.3). Как видно из проведенного рассмотрения, в Ц-системе двух частиц законы сохранения энергии и импульса не накладывают дополнительных ограничений на угол вылета одной из частиц (вторая частица при этом вылетает в строго противоположном направлении). Значения энергий вторичных частиц определяются однозначно эффективной массой системы  $\sqrt{s}$  и массами образующихся частиц ( $m_1$  и  $m_2$ ) (см. (1.40)). Проводя интегрирование по  $d\Omega_1^*$  в указанных выше пределах, окончательно находим

$$F_2(\sqrt{s}, m_1, m_2) \sim 2\pi[s - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s - (m_1 - m_2)^2]^{1/2} / s. \quad (1.41)$$

Таким образом, релятивистски инвариантный фазовый объем системы двух частиц определяется их эффективной массой и массами частиц системы. Из (1.41) следует, что для физических процессов взаимодействия и двухчастичного распада должно выполняться неравенство

$$\sqrt{s} \geq m_1 + m_2, \quad (1.42)$$

которое обеспечивает вещественность функции  $F_2$ . Для процесса распада условие (1.42) сводится к требованию

$$m \geq m_1 + m_2, \quad (1.43)$$

которое является ограничением на сумму масс продуктов распада, вытекающим из закона сохранения энергии, записанного в системе покоя нестабильной частицы:

$$m = E_1^* + E_2^* = [m_1^2 + (p_1^*)^2]^{1/2} + [m_2^2 + (p_2^*)^2]^{1/2}. \quad (1.44)$$

Из (1.44) видно, что правая часть равенства принимает минимальное значение при  $p_1^* = 0$ , когда каждая вторичная частица покоится. Для реализации распада требуется, чтобы  $m \geq m_1 + m_2$ , как и следует из (1.43).

Распределение по эффективной массе пары частиц в трехчастичной системе. Эту задачу можно точно решить аналитически в рамках модели фазового объема (статистической гипотезы). Для этого рассмотрим элемент релятивистски инвариантного фазового объема трехчастичного состояния

$$dF_3 \sim \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta^{(4)}(p - p_1 - p_2 - p_3). \quad (1.45)$$

В (1.45) все обозначения аналогичны обсуждавшимся ранее при рассмотрении двухчастичного фазового объема. Численные множители в выражении для  $dF_3$  опущены (см. (1.30)), поскольку модель фазового объема не претендует на предсказание абсолютных величин дифференциальных

сечений (вероятностей распада). Сравнение полученного на основе (1.45) распределения по эффективной массе двух вторичных частиц с данными опыта проводится лишь по форме распределения, а не по абсолютной величине. Поэтому удобно нормировать распределение (1.45) на единичное значение полного фазового объема, т.е. вычислять величину

$$dW_3 = F_3^{-1} dF_3, \quad (1.46)$$

где  $F_3 = \int dF_3$ , а  $dF_3$  определяется формулой (1.45) без численных коэффициентов.

Вычислим с помощью (1.45) распределение по эффективной массе частиц 1 и 2:  $\sqrt{s_{12}} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ . Обозначим разность  $p - p_3 = g$  и рассмотрим  $dF_3$ :

$$dF_3 = \frac{d^3 p_3}{E_3} \left[ \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta^{(4)}(g - p_1 - p_2) \right]. \quad (1.47)$$

В (1.47) в квадратных скобках после интегрирования по  $d^3 p_1 d^3 p_2$  находится выражение для полного релятивистски инвариантного фазового объема двух частиц с квадратом эффективной массы  $g^2 = (p - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$ :

$$dF_3 \sim \frac{d^3 p_3}{E_3} F_2(\sqrt{s_{12}}, m_1, m_2) = \frac{d^3 p_3}{E_3} \left\{ \frac{2\pi[s_{12} - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s_{12} - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}}{s_{12}} \right\}. \quad (1.48)$$

В силу релятивистской инвариантности вычисление интеграла по  $d^3 p_3$  в правой части (1.48) можно провести в системе центра инерции всех трех вторичных частиц. Как следует из рассмотрения равенства  $s_{12} = (p - p_3)^2$ , энергия  $E_3$  в этой системе отсчета линейно выражается через  $s_{12}$ . Учитывая, что  $p^2 = s$ ,  $p = (\sqrt{s}, 0)$ ,  $p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3)$ ,  $p_3^2 = m_3^2$  ( $\sqrt{s}$  — эффективная масса системы трех частиц,  $m_3$  — масса частицы 3), находим

$$E_3 = (s + m_3^2 - s_{12}) / 2\sqrt{s}. \quad (1.49)$$

Это выражение совпадает с формулой (1.40) для энергии одной из частиц двухчастичной системы в их центре инерции, если в рассматриваемом случае считать частицы "1 + 2" за одну частицу с массой  $\sqrt{s_{12}}$ .

Выражая компоненты вектора  $p_3$  через сферические координаты и совершая с помощью (1.49) замену переменной  $E_3$  на  $s_{12}$ , получаем

$$E_3^{-1} d^3 p_3 = |\mathbf{p}_3| dE_3 d\Omega_3 = |\mathbf{p}_3| ds_{12} d\Omega_3 / 2\sqrt{s},$$

$$|\mathbf{p}_3| = (E_3^2 - m_3^2)^{1/2} = [s - (\sqrt{s_{12}} + m_3)^2]^{1/2} [s - (\sqrt{s_{12}} - m_3)^2]^{1/2} / 2\sqrt{s}.$$

Модуль импульса  $p_3$  в системе центра инерции трех частиц можно записать также в следующем виде:

$$|\mathbf{p}_3| = [(\sqrt{s} + m_3)^2 - s_{12}]^{1/2} [(\sqrt{s} - m_3)^2 - s_{12}]^{1/2} / 2\sqrt{s}. \quad (1.50)$$

В указанной системе отсчета угловые переменные  $\theta_3$  и  $\varphi_3$ , характеризующие направление импульса  $p_3$ , изменяются в пределах  $0 \leq \theta_3 \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi_3 \leq 2\pi$ . Интеграл по телесному углу  $d\Omega_3 = d\cos\theta_3 d\varphi_3$  равен  $4\pi$ .

Поэтому для нормированного на единицу распределения событий по квадрату эффективной массы  $s_{12}$  получаем следующий ответ:

$$\frac{dw_3}{ds_{12}} = \frac{2\pi^2 [(\sqrt{s} + m_3)^2 - s_{12}]^{1/2} [(\sqrt{s} - m_3)^2 - s_{12}]^{1/2}}{ss_{12}F_3(\sqrt{s}, m_1, m_2, m_3)} \times \\ \times [s_{12} - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s_{12} - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}, \quad (1.51)$$

$$F_3(\sqrt{s}, m_1, m_2, m_3) = \frac{2\pi^2}{s} \int \frac{ds_{12}}{s_{12}} [(\sqrt{s} + m_3)^2 - s_{12}]^{1/2} \times \\ \times [(\sqrt{s} - m_3)^2 - s_{12}]^{1/2} [s_{12} - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s_{12} - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}. \quad (1.52)$$

Интеграл в правой части (1.52) вычисляется в пределах

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2. \quad (1.53)$$

Нижний предел вытекает из условия (1.42), а верхний предел нетрудно установить из неравенства  $E_3 \geq m_3$ , где  $E_3$  определяется формулой (1.49).

Действительно, эффективная масса системы трех частиц в системе их центра инерции выражается формулой, отражающей закон сохранения энергии-импульса:

$$\sqrt{s} = (m_3^2 + p_3^2)^{1/2} + [s_{12} + (p_1 + p_2)^2]^{1/2} = (m_3^2 + p_3^2)^{1/2} + (s_{12} + p_3^2)^{1/2}.$$

При фиксированной эффективной массе  $\sqrt{s_{12}}$  частиц 1 и 2 эффективная масса трех частиц минимальна, когда  $p_3 = 0$ , т.е.  $E_3 = (m_3^2 + p_3^2)^{1/2} \geq m_3$  и, соответственно,

$$\sqrt{s} \geq m_3 + \sqrt{s_{12}}.$$

Откуда и следует второе неравенство (1.53).

Интеграл (1.52), представляющий трехчастичный инвариантный фазовый объем, сводится к эллиптическим интегралам третьего рода [6], но поскольку он зависит от четырех параметров  $(s, m_1, m_2, m_3)$ , то табулировать его значения практически невыгодно. Нормировку (1.51) на единичную площадь под кривой распределения проводят обычно с помощью численного расчета функции (1.52)  $F_3(\sqrt{s}, m_1, m_2, m_3)$  для конкретных значений параметров.

Результат (1.51) нас здесь интересует как пример возможного распределения фоновых событий по эффективной массе двух частиц. Очевидно, что функция (1.51) обращается в нуль на верхнем и нижнем пределах изменения  $s_{12}$  (см. (1.53)) и имеет гладкое монотонное поведение в области между нулями с максимумом, где-то в середине допустимого интервала значений. В принципе, форма распределения (1.51) имеет мало общего с резонансным распределением (1.38) в области максимумов этих кривых (в формуле (1.38) следует для сравнения с (1.51) положить  $M^2 = s_{12}$ ). Более того, брейт-вигнеровский пик (1.38) всегда находится при одном и том же значении эффективной массы, равном массе резонанса:  $s_{12} = M_0^2$ . Максимум фазовой кривой (1.51) изменяет свое положение в зависимости от  $s$ . Таким образом, имеются принципиальные возможности идентификации резонансов на фоне нерезонансных статистических распределений по массам.

Распределение по эффективной массе  $k$  частиц из  $n$ -частичной системы. Пусть в конечном состоянии имеется  $n$  частиц, из которых  $k$  частиц могут оказаться продуктами распада резонанса. Элемент  $n$ -частичного фазового объема (1.30) в этом случае целесообразно представить в виде

$$dF_n = \left[ \prod_{i=k+1}^n \left( \frac{d^3 p_i}{E_i} \right) \right] \int d^4 g \delta^{(4)}(p - g - \sum_{i=k+1}^n p_i) \times \\ \times \left[ \prod_{f=1}^k \left( \frac{d^3 p_f}{E_f} \right) \right] \delta^{(4)}(g - \sum_{f=1}^k p_f), \quad (1.54)$$

где по сравнению с (1.30) выделены две группы произведений одночастичных релятивистских фазовых объемов из  $k$  и  $n-k$  частиц и введен интеграл

$$\int d^4 g \delta^{(4)}(p - g - \sum_{i=k+1}^n p_i) = 1, \quad (1.55)$$

не изменяющий фазового объема ввиду того, что он равен единице. Напомним, что формально все компоненты импульсов вторичных частиц могут изменяться в бесконечных пределах (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), но  $\delta$ -функции, отражающие действие законов сохранения энергии и импульса, ограничивают пределы изменения кинематических переменных. Это обстоятельство в явной форме было продемонстрировано ранее при рассмотрении двух- и трехчастичных фазовых объемов.

Заметим теперь, что в формуле (1.54) можно явно выделить произведение двух элементов многочастичных фазовых объемов,  $k$ -частичного и  $(n-k+1)$ -частичного, если представить  $d^4 g$  в следующей форме:

$$d^4 g = dg_0 d^3 g = dg^2 d^3 g / 2g_0, \quad (1.56)$$

где

$$g^2 = \left( \sum_{f=1}^k p_f \right)^2 = s_k$$

— квадрат эффективной массы системы  $k$  частиц с энергией  $g_0 = (g^2 + g_0^2)^{1/2}$ , импульсом  $g = \sum_{f=1}^k p_f$ :

$$\frac{dF_n}{ds_k} \sim \frac{1}{2} \int dF_{n-k+1} \int dF_k = \\ = \frac{1}{2} F_{n-k+1}(\sqrt{s}; \sqrt{s_k}, m_{k+1}, \dots, m_n) F_k(\sqrt{s_k}; m_1, \dots, m_k). \quad (1.57)$$

Здесь  $F_k(\sqrt{s_k}; m_1, \dots, m_k)$  — релятивистский фазовый объем системы  $k$  частиц с массами  $m_1, \dots, m_k$  и эффективной массой  $\sqrt{s_k}$ , по которой и вычисляется распределение (1.57);  $F_{n-k+1}(\sqrt{s}; \sqrt{s_k}, m_{k+1}, \dots, m_n)$  — релятивистский фазовый объем системы  $(n-k+1)$  частиц, в которой одна частица имеет массу  $\sqrt{s_k}$ , а остальные  $(n-k)$  — частиц имеют массы  $m_{k+1}, \dots, m_n$ . Систему из  $k$  частиц, рассматриваемую как единую частицу с массой  $\sqrt{s_k}$ , часто называют компаунд-частицей [6].

Распределение (1.57) нетрудно формально нормировать на единицу. Если вместо переменной  $s_k$  использовать переменную  $M_k = \sqrt{s_k}$ , то нормированное распределение по  $M_k$  запишется в виде

$$\frac{dF_n}{dM_k} = \frac{M_k F_{n-k+1}(M_n; M_k, m_{k+1}, \dots, m_n) F_k(M_k; m_1, \dots, m_k)}{F_n(M_n; m_1, \dots, m_n)}, \quad (1.58)$$

где  $F_n = (M_n; m_1, \dots, m_n)$  — релятивистский фазовый объем системы  $n$  частиц с эффективной массой  $M_n = \sqrt{s}$ . Напомним, что при вычислении фазовых объемов  $F_l$  мы договорились опускать в определении (1.30) численные множители, т.е.

$$F_l(\sqrt{s}; m_1, \dots, m_l) = \int \left( \prod_{f=1}^l \frac{d^3 p_f}{E_f} \right) \delta^{(4)} \left( p - \sum_{f=1}^l p_f \right). \quad (1.59)$$

Многочисленные интегрирования по всем компонентам импульсов вторичных частиц  $p_f$  обозначены условно лишь одним символом интегрирования. К сожалению, распределение (1.58) в общем случае не представляется в виде аналитической формулы. Только в случае  $n = 3$ ,  $k = 2$  возможна подобная операция с точностью до независимого от  $M_k$  нормировочного множителя (см. (1.51)). Поэтому, на первый взгляд, из соотношения (1.58) нельзя извлечь практических выгод. Однако оказывается возможным предложить простую приближенную формулу для аналитического поведения правой части (1.58). Такая формула найдена в книге [6]. Ее вывод основывается на рассмотрении фазового объема в предельном случае небольшого энерговыделения  $T_n$  в системе  $n$  частиц с эффективной массой  $\sqrt{s_n} = M_n$ . Энерговыделение  $T_n$  определяется как разность между эффективной массой  $M_n$  и суммой масс частиц системы:

$$T_n = M_n - \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1.60)$$

Величина  $T_n$  характеризует часть энергии первичной системы в Ц-системе, которая переходит в кинетическую энергию вторичных частиц. Когда

$$T_n \ll \sum_{i=1}^n m_i = \mu_n,$$

такой случай называют нерелятивистским. В этом случае можно указать аналитическую зависимость  $n$ -частичного релятивистского фазового объема  $F_n(M_n; m_1, \dots, m_n)$  от  $T_n$  [6]. Воспользуемся формулой (1.58) для вычисления  $F_n$  в нерелятивистском приближении. Для этого выберем число  $k = n - 1$ , тогда

$$F_n(M_n; m_1, \dots, m_n) \sim \int dM_{n-1} M_{n-1} F_2(M_n; M_{n-1}, m_n) F_{n-1}(M_{n-1}; m_1, \dots, m_{n-1}).$$

Двухчастичный фазовый объем  $F_2$  вычислялся ранее (см. (1.41)):

$$F_2(M_n; M_{n-1}, m_n) = 2\pi [M_n^2 - (M_{n-1} + m_n)^2]^{1/2} [M_n - (M_{n-1} - m_n)^2]^{1/2} / M_n^2.$$

В нерелятивистском пределе, когда

$$T_n = M_n - \mu_n \ll \mu_n, \quad T_{n-1} = M_{n-1} - \mu_{n-1} \ll \mu_{n-1}, \\ T_n, T_{n-1} \ll m_n,$$

имеем

$$F_2(M_n; M_{n-1}, m_n) \approx 4\pi [(2\mu_{n-1} m_n)^{1/2} (T_n - T_{n-1})]^{1/2} / \mu_n^{3/2}, \quad (1.61)$$

$$F_n(M_n; m_1, \dots, m_n) \sim 4\pi (2m_n \mu_{n-1}^3 / \mu_n^3)^{1/2} \int_0^{T_n} dT_{n-1} (T_n - T_{n-1})^{1/2} F_{n-1}(T_{n-1}). \quad (1.62)$$

Пределы интегрирования в (1.62) очевидны из предыдущих обсуждений. Покажем теперь, что в нерелятивистском приближении [6]

$$F_n(M_n; m_1, \dots, m_n) \sim T_n^{(3n-5)/2}. \quad (1.63)$$

Прямым вычислением находим, что при  $n = 2$

$$F_2(M_2; m_1, m_2) \sim T_2^{1/2}.$$

Этот результат совпадает с (1.63) при  $n = 2$ . Справедливость зависимости (1.63) докажем с помощью математической индукции. Согласно (1.63)

$$F_{n-1}(T_{n-1}) \sim T_{n-1}^{(3n-8)/2},$$

тогда, подставляя эту зависимость в (1.62), получаем

$$F_n(T_n) \sim \int_0^{T_n} dT_{n-1} (T_n - T_{n-1})^{1/2} T_{n-1}^{(3n-8)/2}. \quad (1.64)$$

Делая в (1.64) замену переменной интегрирования  $T_{n-1}$  на  $x = T_{n-1}/T_n$ , представляем (1.64) в виде

$$F_n(T_n) \sim T_n^{(3n-5)/2} \int_0^1 dx (1-x)^{1/2} x^{(3n-8)/2}.$$

Поскольку интеграл в этом выражении — числовой коэффициент, полученная зависимость от  $T_n$  совпадает с (1.63).

Результат (1.63) позволяет исследовать поведение распределения (1.58) вблизи нижнего предела, когда  $M_k \rightarrow \mu_k = \sum_{f=1}^k m_f$  ( $T_k \rightarrow 0$ ):

$$T_k = M_k - \mu_k = M_k - \sum_{f=1}^k m_f \ll \mu_k,$$

и вблизи верхнего предела, когда  $M_k \rightarrow M_n - \mu_{n-k}$  ( $T_k \rightarrow M_n - \mu_n = T_n$ ):

$$T_n - T_k \ll M_k + \mu_{n-k}.$$

В первом случае нерелятивистской является система из  $k$  частиц с эффективной массой  $M_k$ , т.е.

$$F_k(M_k; m_1, \dots, m_k) \sim T_k^{(3k-5)/2}. \quad (1.65)$$

При этом множитель  $F_{n-k+1}(M_n, M_k, m_{k+1}, \dots, m_n)$  в (1.58) — практически постоянная величина при фиксированном значении  $M_n$ .



Во втором случае нерелятивистской является система частиц с массами  $M_k, m_{k+1}, \dots, m_n$ . Энерговыведение в этом случае составляет

$$M_n - M_k - \mu_{n-k} = T_n - T_k.$$

Фазовый объем  $F_{n-k+1}(M_n; M_k, m_{k+1}, \dots, m_n)$  пропорционален простым выражениям:

$$F_{n-k+1}(M_n; M_k, m_{k+1}, \dots, m_n) \sim (T_n - T_k)^{[3(n-k+1)-5]/2} \sim (T_n - T_k)^{[3(n-k)-2]/2}. \quad (1.66)$$

Величина  $F_k(M_k; m_1, \dots, m_k)$  как функция  $T_k$  практически постоянна. В книге [6] показано, что форма распределения по эффективной массе  $M_k$  (1.58) неплохо передается произведением зависимостей (1.65) и (1.66), которое можно представить через безразмерную величину

$$x = T_k/T_n = (M_k - \mu_k)/(M_n - \mu_n)$$

в виде

$$dw/dx \sim x^{(3k-5)/2} (1-x)^{[3(n-k)-2]/2}. \quad (1.67)$$

Область изменения  $x$ :  $0 \leq x \leq 1$ . Максимум распределения (1.67) имеет место в точке [6]

$$x_M = (3k - 5)/(3n - 7).$$

Формула (1.67) позволяет быстро оценить форму поведения статистического распределения по эффективной массе группы, содержащей любое число частиц  $k \leq n-1$ .

В этом и состоит ее практическая ценность при поисках резонансов в системах с большим числом частиц.

В заключение этого раздела отметим, что на опыте поиск резонансов осуществляют двумя методами: 1) на основе измерения эффективной массы системы частиц, на которые распадается резонансное состояние; 2) с помощью метода недостающих масс, который применяется в тех случаях, когда продукты распада резонансов на опыте не детектируются, но сопровождающие резонанс частицы легко наблюдаются. В таких случаях составляют на основе экспериментальных данных инвариант

$$M^2 = \left( \sum_{i=1}^2 p_i - \sum_{f=1}^n p_f \right)^2, \quad (1.68)$$

где  $p_i$  — 4-импульсы начальных частиц,  $p_f$  — 4-импульсы детектируемых вторичных частиц. Инвариант (1.68) есть квадрат эффективной массы недетектируемых частиц, некоторые комбинации которых могут образовывать резонансное состояние. Очевидно, что возможность изучения таких состояний методом недостающей массы есть прямое следствие законов сохранения энергии и импульса.

## КИНЕМАТИКА ДВУХЧАСТИЧНЫХ РАСПАДОВ

### 2.1. Двухчастичный распад в системе покоя нестабильной частицы

Процесс распада нестабильной частицы  $A$  на две вторичные частицы 1 и 2  $A \rightarrow 1 + 2$

(2.1)

наиболее просто выглядит в системе отсчета, связанной с частицей  $A$ . В этой системе 3-импульс  $p_A^* = 0$ , а 3-импульсы вторичных частиц в силу законов сохранения проекций импульсов связаны соотношением

$$p_1^* + p_2^* = 0 \quad (2.2)$$

и, следовательно, равны друг другу по модулю ( $|p_1^*| = |p_2^*|$ ) и направлены в противоположные стороны ( $p_1^* = -p_2^*$ ). Энергии вторичных частиц выражаются через их импульсы согласно обычным соотношениям:

$$E_1^* = [m_1^2 + (p_1^*)^2]^{1/2}, \quad E_2^* = [m_2^2 + (p_1^*)^2]^{1/2}, \quad (2.3)$$

где  $m_1, m_2$  — массы вторичных частиц. Энергии  $E_1^*$  и  $E_2^*$ , а также импульс  $|p_1^*|$ , можно найти из закона сохранения энергии

$$m_A = E_1^* + E_2^*, \quad (2.4)$$

где  $m_A$  — масса нестабильной частицы  $A$ .

Однако проще вычислить характеристики вторичных частиц с помощью релятивистских инвариантов. В ковариантной форме законы сохранения энергии и импульса представляются в виде следующего равенства:

$$p_A = p_1 + p_2, \quad (2.5)$$

где  $p_A, p_1, p_2$  — 4-векторы импульсов первичной и вторичных частиц. Если (2.5) записать в виде

$$p_A - p_1 = p_2$$

и возвести в квадрат обе части этого равенства, то получим соотношение между инвариантами

$$(p_A - p_1)^2 = p_2^2. \quad (2.6)$$

Квадрат 4-импульса частицы — скалярное произведение этого 4-импульса на самого себя. Как известно, такое скалярное произведение равно квадрату массы частицы (1.8). Таким образом, правая часть соотношения (2.6) равна квадрату массы частицы 2, а левая часть — квадрату 4-вектора  $p_A - p_1$ :

$$(p_A - p_1)^2 = m_A^2 - 2(p_A p_1) + m_1^2.$$

Скалярное произведение  $(p_A p_1)$  есть релятивистский инвариант. Поэтому в системе покоя частицы  $A$ , где  $p_A = (m_A, 0)$ ,  $p_1 = (E_1^*, p_1^*)$ :

$$(p_A p_1) = m_A E_1^* - (0 \cdot p_1^*) = m_A E_1^*.$$

С учетом этого результата и равенства (2.6) можно получить для энергии  $E_1^*$  и модуля импульса  $p_1^*$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_1^* &= (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2)/2m_A, \\ |p_1^*| &= [m_A^2 - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [m_A^2 - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}/2m_A. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя (2.7), из (2.4) находим

$$E_2^* = (m_A^2 + m_2^2 - m_1^2)/2m_A. \quad (2.8)$$

Формулы (2.7), (2.8) аналогичны формуле (1.40), в которой замена  $s \rightarrow m_A^2$  сразу приводит к результату (2.7). Это неудивительно, так как в распаде (2.1) масса  $m_A$  является полной энергией первичного состояния в его Ц-системе, которая в данном случае совпадает с системой покоя частицы. Итак, в процессе двухчастичного распада в системе отсчета, где распадающаяся частица покоится, энергии вторичных частиц 1 и 2 имеют фиксированное значение и выражаются через массы частиц, участвующих в реакции (см. (2.7), (2.8)). Поэтому энергетический спектр вторичных частиц определенного сорта при распаде (2.1) имеет в системе покоя частицы  $A$   $\delta$ -образный характер:

$$dw/dE_1^* = \delta[E_1^* - (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2)/2m_A]. \quad (2.9)$$

Конечно,  $\delta$ -функция в формуле (2.9) в реальной экспериментальной ситуации превращается в узкий максимум с полушириной, соответствующей экспериментальным погрешностям в измерении энергии частицы.

Как уже отмечалось (см. раздел 1.4), конфигурация импульсов вторичных частиц 1 и 2 в системе покоя частицы  $A$  (рис. 2.1) может занимать в пространстве произвольное положение. Это означает, что распределение событий по угловым сферическим координатам вектора  $p_1^*(\theta_1^*, \varphi_1^*)$  изотропно:

$$dw/d\Omega_1^* = 1/4\pi, \quad (2.10)$$

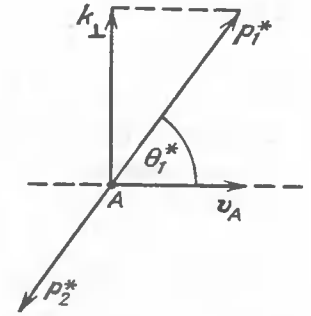
причем угловые переменные могут изменяться в пределах  $0 \leq \theta_1^* \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi_1^* \leq 2\pi$ .

Формула (2.10) отражает равновероятность испускания в элемент телесного угла  $d\Omega_1^* = \sin \theta_1^* d\theta_1^* d\varphi_1^*$  вторичных частиц сорта 1 распада (2.1) в системе покоя. Полная вероятность при этом нормирована на единицу:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos \theta_1^* \int_0^{2\pi} d\varphi_1^* = 1. \quad (2.11)$$

Обычно полярный угол  $\theta_1^*$  отсчитывается от направления скорости  $v_A$  нестабильной частицы  $A$  (рис. 2.1). В направлении  $-v_A$  осуществляется релятивистское преобразование в систему отсчета, где частица  $A$  покоится.

Рис. 2.1. Конфигурация импульсов вторичных частиц  $p_1^*$  и  $p_2^*$  в системе покоя распадающейся частицы  $A$ :  $v_A$  — скорость частицы  $A$  в системе отсчета, где эта частица движется,  $\theta_1^*$  — угол вылета частицы 1 по отношению к направлению  $v_A$ ,  $k_\perp$  — поперечная составляющая вектора  $p_1^*$



Преобразование в Л-систему, где частица  $A$  движется со скоростью  $v_A$ , совершается именно с этим параметром преобразования Лоренца:

$$E_A = m_A/\sqrt{1-v_A^2}, \quad p_A = m_A v_A/\sqrt{1-v_A^2}. \quad (2.12)$$

Здесь  $E_A$ ,  $p_A$  — энергия и 3-импульс движущейся частицы  $A$ . Отметим, что ориентация плоскости векторов  $p_1^*$  и  $v_A$  в пространстве не фиксирована. Вращение этой плоскости вокруг вектора  $v_A$  отвечает изменению ее азимутальной координаты  $(\varphi_1^*)$ , которая на рис. 2.1 не указана.

Отмеченные выше кинематические свойства и характеристики двухчастичного распада непосредственно вытекают из анализа распределений вторичных частиц в рамках модели релятивистского фазового объема. Напомним, что спиновыми переменными и связанными с ними эффектами в кинематике, как правило, пренебрегается. С такой точностью можно заключить, что инвариантная амплитуда двухчастичного распада (2.1) является постоянной величиной. Действительно, эта амплитуда в силу ее релятивистской инвариантности может зависеть только от релятивистских инвариантов, составленных из 4-импульсов частиц, участвующих в распаде. Однако, используя законы сохранения энергии и импульса в виде (2.5), нетрудно показать, что все скалярные произведения, составленные из 4-импульсов  $p_A$ ,  $p_1$  и  $p_2$ , выражаются через массы частиц, которые фиксированы в каждом конкретном распаде. Приведем здесь эти скалярные произведения:

$$\begin{aligned} p_A^2 &= m_A^2, \quad p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \\ (p_1 p_2) &= (m_A^2 - m_1^2 - m_2^2)/2, \quad (p_1 p_A) = (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2)/2, \\ (p_2 p_A) &= (m_A^2 + m_2^2 - m_1^2)/2. \end{aligned}$$

Таким образом, квадрат модуля инвариантной амплитуды двухчастичного распада в случае бесспиновых частиц (или усредненный по спиновым состояниям неполяризованных частиц)  $|M|^2 = \text{const}$ . Следовательно, форма распределения таких вторичных частиц по кинематическим переменным в двухчастичном распаде (2.1) полностью определяется релятивистски инвариантным элементом фазового объема вторичных частиц (см. (1.30), (1.33))

$$dw = \frac{|M|^2}{2E_A} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{2E_1 (2\pi)^3 2E_2 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2), \quad (2.13)$$

или, опуская постоянные коэффициенты и факторы,

$$dw \sim \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2). \quad (2.14)$$

Распределение (2.14) принято нормировать на единицу, т.е. так, чтобы полная вероятность  $w = \int dw = 1$ .

Кинематика не претендует на такие количественные предсказания, как вычисление вероятности распадов в единицу времени, сечения различных процессов взаимодействия. Она, в лучшем случае, претендует на предсказание формы распределения вторичных частиц по их кинематическим переменным. Поэтому нормировка этих распределений на единицу удобна как введение некоторого единообразия в представление теоретических предсказаний, а также для сравнения с экспериментальными данными, которые всегда можно нормировать таким же образом.

В (2.14) все интегралы по  $d^3 p_1$  и  $d^3 p_2$  легко вычисляются (см. (1.39), (1.41)). Представим здесь результат вычислений в следующем виде:

$$w \propto 4\pi |p_1^*|/m_A. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) позволяет нормировать распределение (2.14) на единицу:

$$dw = \frac{m_A}{4\pi |p_1^*|} \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2). \quad (2.16)$$

Проводя в (2.16) интегрирование по  $d^3 p_2$  и  $dE_1^*$  в системе покоя частицы  $A$  аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.6, находим угловое распределение одного из продуктов распада в этой системе:

$$dw = (4\pi)^{-1} d\Omega_1^*. \quad (2.17)$$

Формула (2.17) полностью эквивалентна (2.10).

Таким образом, изотропный характер углового распределения одного из продуктов двухчастичного распада в системе покоя нестабильной частицы есть главная особенность этого процесса. Разумеется, этот вывод верен в пренебрежении спинами частиц.

В тех случаях, когда первичная частица характеризуется средним значением спина  $S_A$ , отличным от нуля ( $\langle S_A \rangle \neq 0$ ), или фиксируются поляризационные (спиновые) состояния вторичных частиц, квадрат модуля инвариантной амплитуды процесса двухчастичного распада может, в принципе, оказаться зависящим от скалярных произведений 4-векторов импульсов частиц и 4-векторов их спиновых поляризаций [9, 11]. В системе покоя частицы  $A$  это обстоятельство приводит к возможной зависимости углового распределения (2.17) от угла между направлениями импульса  $p_1^*$  и среднего значения спина (поляризации)  $\xi$  одной из частиц в указанной системе. В таких случаях говорят о корреляциях между импульсами и спинами частиц в процессе распада. Количественно эти корреляции определяются типом взаимодействия и динамикой процесса и не подвластны кинематике.

## 2.2. Энергетическое распределение продуктов двухчастичного распада движущейся частицы

В системе отсчета, в которой нестабильная частица  $A$  движется со скоростью  $v_A$ , энергии продуктов ее двухчастичного распада (2.1) уже не являются строго фиксированными. Этот вывод следует из формулы релятивистского преобразования для энергии одной из вторичных частиц из системы покоя частицы  $A$  в систему, где она движется со скоростью  $v_A$ :

$$E_1 = [E_1^* + (p_1^* v_A)] / \sqrt{1 - v_A^2}. \quad (2.18)$$

Это соотношение с помощью формул (2.12) можно представить в виде

$$E_1 = m_A^{-1} (E_1^* E_A + |p_1^*| p_A \cos \theta_1^*), \quad (2.19)$$

где  $E_A, p_A$  — энергия и 3-импульс движущейся частицы  $A$ ,  $m_A$  — ее масса,  $\theta_1^*$  — угол вылета частицы 1 в системе покоя частицы  $A$ . Напомним, что энергия  $E_1^*$  и модуль импульса  $p_1^*$  частицы 1 в системе покоя частицы  $A$  выражаются через массы частиц (см. (2.7)) и являются фиксированными. Формула (2.19) свидетельствует о том, что энергия частицы 1 в Л-системе (где частица  $A$  движется) меняется линейно в зависимости от  $\cos \theta_1^*$ . Если в системе покоя частицы  $A$ , частица 1 вылетает под углом  $\theta_1^* = 0$  ( $\cos \theta_1^* = 1$ ), то в Л-системе ее энергия принимает максимально возможное значение при фиксированной энергии  $E_A$

$$(E_1)_{\max} = m_A^{-1} (E_1^* E_A + |p_1^*| p_A). \quad (2.20)$$

В случае  $\theta_1^* = \pi$  ( $\cos \theta_1^* = -1$ ) энергия  $E_1$  принимает минимально возможное значение

$$(E_1)_{\min} = m_A^{-1} (E_1^* E_A - |p_1^*| p_A). \quad (2.21)$$

Таким образом, энергия частицы 1 (или 2) в Л-системе однозначно связана с косинусом угла ее вылета в системе покоя частицы  $A$  и изменяется в пределах (2.20), (2.21):

$$(E_1)_{\min} \leq E_1 \leq (E_1)_{\max}. \quad (2.22)$$

Следовательно, в отличие от случая системы покоя частицы в Л-системе, энергии вторичных частиц пробегает спектр значений в интервале (2.22). Распределение событий распада (2.1) по энергии  $E_1$  нетрудно получить, проводя вычисления на основе формулы (2.16), раскрывая инвариантную запись в Л-системе. Но проще это сделать используя угловое распределение (2.17) в системе покоя частицы  $A$  и соотношение (2.19) между  $E_1$  и  $\cos \theta_1^*$ . При этом в (2.17) следует предварительно проинтегрировать по  $d\varphi_1^*$  в пределах от 0 до  $2\pi$ . В результате получаем

$$dw = (d \cos \theta_1^*) / 2. \quad (2.23)$$

Совершая с помощью (2.19) замену переменной  $\cos \theta_1^*$  на  $E_1$ :

$$d \cos \theta_1^* = m_A dE_1 / |p_1^*| p_A,$$

находим энергетический спектр одного из продуктов распада в Л-системе:

$$dw/dE_1 = m_A / 2 |p_1^*| p_A. \quad (2.24)$$

Отметим, что правая часть формулы (2.24) не зависит от  $E_1$  и, следова-

тельно, равновероятны любые значения энергии  $E_1$  из интервала (2.22). Распределение (2.24) носит ступенчатый характер (рис. 2.2). С ростом энергии распадающейся частицы  $E_A$  длина "ступеньки" увеличивается, а высота падает (см. (2.20), (2.21)). Последнее свойство является следствием нормировки распределения (2.24) на единичную площадь под "ступенькой" при любых значениях  $E_A$ . При  $E_A \rightarrow m_A$  ( $v_A \rightarrow 0$ ) ширина "ступеньки" стремится к нулю по закону

$$\Delta E_1 = (E_1)_{\max} - (E_1)_{\min} \approx 2|p_1^*|v_A,$$

а высота — к бесконечности по закону

$$dw/dE_1 \approx (2|p_1^*|v_A)^{-1}.$$

При  $v_A = 0$  энергия  $E_1 = E_1^*$  и спектр представляется  $\delta$ -функцией (2.9)

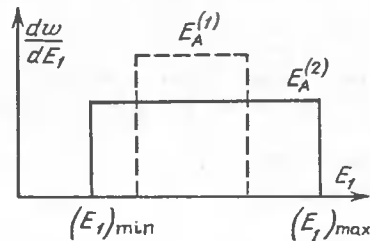


Рис. 2.2. Энергетический спектр вторичной частицы в двухчастичном распаде. Сплошная и штриховая фигуры отвечают энергиям частицы  $A$ , удовлетворяющим соотношению  $E_A^{(2)} > E_A^{(1)}$

В дальнейшем станет ясно, что ступенчатость энергетического спектра продуктов двухчастичного распада движущейся нестабильной частицы есть специфическое свойство двухчастичного распада, его "фирменный знак".

Заметим, однако, что этот признак проявляется лишь в такой ситуации, когда пучок нестабильных частиц монохроматический. На практике это означает, что для анализа распадов нестабильных частиц нужно отбирать события из ограниченного интервала значений энергий (импульсов) нестабильной частицы.

Можно предложить и чисто кинематический метод монохроматизации пучка нестабильных частиц. Этот метод наиболее эффективен в случае двухчастичных квазиупругих реакций образования нестабильных частиц (1.24).

Пусть в реакции (1.24) частица  $C$  нестабильна и предполагается изучить каналы ее распадов. Тогда при фиксированном значении инварианта  $s = (p_A + p_B)^2$ , энергия частицы "С" в Ц-системе реакции (1.24) также фиксируется:

$$E_C^* = (s + m_C^2 - m_D^2)/2\sqrt{s}.$$

Инвариант  $s$  обычно задается энергией налетающей частицы  $A$  в Л-системе, суммой энергий сталкивающихся частиц  $A$  и  $B$  в Ц-системе или энергиями частиц встречных пучков и углом их пересечения. Все эти способы наиболее распространены на практике.

### 2.3. Угловые распределения вторичных частиц при двухчастичных распадах на лету

Процесс распада движущейся нестабильной частицы часто называют распадом на лету. После анализа характера энергетического спектра вторичных частиц в двухчастичных распадах на лету естественно возникает вопрос о форме угловых распределений продуктов распада движущейся частицы. Заметим, что распределение по азимутальному углу  $\varphi_1$  импульса одной из вторичных частиц должно быть равномерным, так как конфигурация вторичных импульсов ( $p_1 + p_2$ ) может занимать в пространстве произвольное положение относительно вращений около оси, совпадающей с направлением 3-импульса первичной частицы (рис. 2.3). Этот же вывод можно сделать исходя из других соображений: азимутальный угол  $\varphi_1$  характеризует компоненту импульса  $p_1$  (или  $p_2$ ), расположенную в плоскости, перпендикулярной направлению импульса первичной частицы  $p_A$ . Поскольку при релятивистских преобразованиях вдоль направления  $p_A$  ( $v_A$ ) поперечные компоненты 3-векторов импульсов частиц не меняются, то и азимутальный угол оказывается инвариантом относительно таких преобразований ( $\varphi_1 = \varphi_1^*$ ). Поэтому однородность распределения событий по углу  $\varphi_1^*$  в системе покоя частицы  $A$  автоматически обеспечивает однородность распределения по углу  $\varphi_1$  при распадах на лету. Конечно, утверждение о том, что  $\varphi_1 = \varphi_1^*$ , предполагает, что оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат в плоскости, перпендикулярной вектору  $p_A$ , выбраны одинаковым образом как в системе покоя частицы  $A$ , так и в системе, где она движется. Таким образом, можно изучать распределение вторичных частиц по двум независимым переменным:  $\theta_1^*, \varphi_1^*$  — в системе покоя  $A$  (см. (2.17),  $E_1, \varphi_1$  — в Л-системе ( $v_A \neq 0$ )):

$$d^2w/dE_1 d\varphi_1 = m_A/4\pi |p_A| |p_1^*|. \quad (2.25)$$

После сделанных выше замечаний становится очевидно, что интегрирование правой части (2.25) по  $\varphi_1$  в пределах от 0 до  $2\pi$  не изменяет результата (2.24). Поскольку независимых кинематических переменных только две, причем переменные  $E_1$  и  $\varphi_1$  независимы, то отсюда следует, что переход к переменной  $\theta_1$  (полярному углу вылета частицы 1 в Л-системе; см. рис. 2.3) можно осуществить, установив связь между  $E_1$  и  $\theta_1$ .

Такой подход, однако, не является единственным. Вывести формулу для распределения событий по углу  $\theta_1$  можно, используя исходное нормированное инвариантное выражение для распределений по импульсам частиц при двухчастичном распаде (2.16) и проводя необходимое интегрирование сразу в Л-системе. Рекомендуем выполнить расчеты таким методом в качестве полезного упражнения.

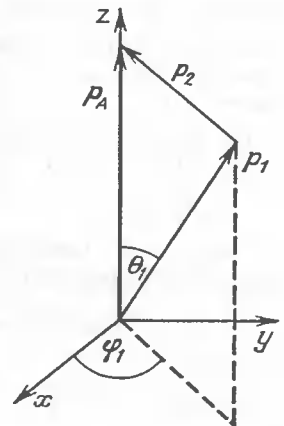


Рис. 2.3. Конфигурация импульсов в двухчастичном распаде на лету.  $\theta, \varphi_1$  — полярный и азимутальный углы, характеризующие направление 3-вектора импульса  $p_1$  вторичной частицы

Первый подход представляется более простым, так как позволяет получить искомое распределение по  $\theta_1$  на основе результата (2.24) с помощью замены переменной  $E_1 \rightarrow \theta_1$ . Связь между  $E_1$  и  $\theta_1$  содержится в формуле релятивистского преобразования для энергии  $E_1$  из Л-системы в систему покоя частицы  $A$ :

$$E_1^* = m_A^{-1}(E_1 E_A - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_A| \cos \theta_1). \quad (2.26)$$

Напомним, что энергия  $E_1^*$  фиксирована (см. (2.7)). Поэтому формула (2.26) позволяет однозначно выразить  $\cos \theta_1$  через энергию частицы 1:

$$\cos \theta_1 = (E_1 E_A - m_A E_1^*) / |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_A|. \quad (2.27)$$

Случай безмассовой вторичной частицы. Если частица 1 безмассовая ( $m_1 = 0$ ), то ее энергия  $E_1 = |\mathbf{p}_1|$  и однозначно выражается через  $\cos \theta_1$ :

$$E_1 = m_A E_1^* / (E_A - |\mathbf{p}_A| \cos \theta_1). \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует, что

$$dE_1 = m_A |\mathbf{p}_A| E_1^* d \cos \theta_1 / (E_A - |\mathbf{p}_A| \cos \theta_1)^2. \quad (2.29)$$

Из (2.29) и (2.24) вытекает следующая форма распределения безмассовых вторичных частиц по углам вылета в двухчастичном распаде:

$$\frac{dw}{d \cos \theta_1} = \frac{m_A^2}{2(E_A - |\mathbf{p}_A| \cos \theta_1)^2} = \frac{1 - v_A^2}{2(1 - v_A \cos \theta_1)^2}. \quad (2.30)$$

Здесь учтено, что

$$E_1^* = |\mathbf{p}_1^*|, \quad |\mathbf{p}_A| / E_A = v_A, \quad m_A / E_A = \sqrt{1 - v_A^2}.$$

Восстанавливая распределение по азимутальному углу  $\varphi_1$ , формулу (2.30) можно представить в виде распределения событий по телесному углу  $\Omega_1$  в Л-системе:

$$dw/d\Omega_1 = (1 - v_A^2)/4\pi(1 - v_A \cos \theta_1)^2. \quad (2.31)$$

Осталось решить вопрос о пределах возможных значений угла  $\theta_1$  (или  $\cos \theta_1$ ) в случае безмассовой частицы ( $m_1 = 0$ ). Для этого рассмотрим связь (2.27) при условии  $m_1 = 0$ :

$$\cos \theta_1 = 1/v_A - m_A E_1^* / E_1 |\mathbf{p}_A|. \quad (2.32)$$

Из (2.32) следует, что значение  $\cos \theta_1$  максимально, если максимально значение  $E_1$ . Подставляя в (2.32) значение  $(E_1)_{\max}$  (см. (2.20)) при условии  $m_1 = 0$ :

$$(E_1)_{\max} = m_A^{-1}(E_1^*(E_A + |\mathbf{p}_A|)), \quad (2.33)$$

находим

$$(\cos \theta_1)_{\max} = 1.$$

Значение  $\cos \theta_1$  минимально, если энергия  $E_1$  также минимальна. Подставляя в (2.32) значение  $E_{1\min}$  (см. (2.21)) при условии  $m_1 = 0$ :

$$(E_1)_{\min} = m_A^{-1}[E_1^*(E_A - |\mathbf{p}_A|)], \quad (2.34)$$

находим

$$(\cos \theta_1)_{\min} = -1.$$

Это означает, что угол вылета  $\theta_1$  безмассовой вторичной частицы в Л-системе изменяется в пределах

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi. \quad (2.35)$$

Отсутствие кинематических ограничений на угол  $\theta_1$  в случае безмассовой частицы физически закономерно. Безмассовая частица движется со скоростью света  $c = 1$  в любой инерциальной системе отсчета. Поэтому никаким релятивистским преобразованием системы отсчета нельзя изменить направление движения безмассовой частицы на обратное, если она движется в некоторой системе отсчета в направлении, противоположном скорости преобразования  $v_A$ . Этот вывод сразу же вытекает из релятивистского преобразования для углов вылета безмассовой частицы по отношению к направлению скорости преобразования Лоренца  $v_A$ :

$$\cos \theta_1 = (\cos \theta_1^* + v_A) / (1 + v_A \cos \theta_1^*), \quad (2.36)$$

которая легко выводится из общих релятивистских преобразований:

$$E_1 = (E_1^* + v_A E_1^* \cos \theta_1^*) / \sqrt{1 - v_A^2},$$

$$p_1 \cos \theta_1 = (E_1^* \cos \theta_1^* + v_A E_1^*) / \sqrt{1 - v_A^2}.$$

Из (2.36) вытекает: если  $\theta_1^* = 0$ , то и  $\theta_1 = 0$ ; если  $\theta_1^* = \pi$  то и  $\theta_1 = \pi$ ; интервалы изменения  $\theta_1^*$  и  $\theta$  совпадают с геометрическими:

$$\cos \theta_1, \cos \theta_1^* \in [-1, 1].$$

Отметим, далее, что распределение (2.31) отнюдь не изотропное. Оно оказывается изотропным лишь в пределе  $v_A \rightarrow 0$ . Для ультрарелятивистских нестабильных частиц, энергия которых  $E_A \gg m_A$  ( $v_A \rightarrow 1$ ), распределение (2.31) приобретает следующую приближенную форму, справедливую в области малых углов вылета ( $\theta_1 \ll 1$ ):

$$dw/d\Omega_1 \approx m_A^2 / \pi E_A^2 (m_A^2 / E_A^2 + \theta_1^2)^2, \quad (2.37)$$

которая свидетельствует о резкой вытянутости вперед (в направлении  $v_A$ ) углового распределения безмассовых продуктов распада. Основная статистика событий относится к области углов  $\theta_1 \lesssim m_A / E_A$ . Укажем, что при выводе (2.37) из (2.31) использовались приближенные формулы:

$v_A \approx 1 - (m_A^2 / 2E_A^2)$ ,  $\cos \theta_1 \approx 1 - \theta_1^2 / 2$ . Из формулы (2.31) можно оценить отношение амплитуд распределений при углах вылета  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_1 = \pi$ :

$$dw(\theta_1 = 0) / dw(\theta_1 = \pi) = (1 + v_A)^2 / (1 - v_A)^2.$$

Это отношение характеризует асимметрию вылета безмассовых частиц в Л-системе в направлениях вперед-назад. Для ультрарелятивистских нестабильных частиц ( $E_A \gg m_A$ ) эта асимметрия велика:

$$dw(\theta_1 = 0) / dw(\theta_1 = \pi) \approx (2E_A / m_A)^4.$$

Случай массивной вторичной частицы. Если вторичная частица 1 имеет массу  $m_1 \neq 0$ , то зависимость ее энергии  $E_1$  от  $\cos \theta_1$  в общем случае двузначная. Это заключение следует из того факта, что соотношение (2.27) приводит к квадратному уравнению для энергии  $E_1$  (влияние множителя  $|\mathbf{p}_1| = (E_1^2 - m_1^2)^{1/2}$  в знаменателе правой части (2.27)). Удобно выписать



на основе (2.27) квадратное уравнение для модуля импульса  $p_1$ , а не энергии  $E_1$ , поскольку анализ этого уравнения допускает простую геометрическую интерпретацию. Для упрощения обозначений будем в данном разделе пользоваться символами  $p_1$  и  $p_A$  для модулей 3-импульсов  $p_1$  и  $p_A$  ( $p_1 = |p_1|$ ,  $p_A = |p_A|$ ). Преобразуя равенство (2.27) к виду

$$E_1 E_A = m_A E_1^* + p_1 p_A \cos \theta_1,$$

возведем в квадрат обе части полученного равенства и используем соотношения

$$E_1^2 = p_1^2 + m_1^2, \quad E_A^2 = p_A^2 + m_A^2.$$

Выполнив указанные действия, находим квадратное уравнение для модуля импульса  $p_1$ :

$$p_1^2 (E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1) - 2 m_A E_1^* p_A \cos \theta_1 + m_1^2 E_A^2 - m_A^2 E_1^2 = 0. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) имеет формально два корня:

$$p_1^{(1,2)} = \frac{m_A E_1^* p_A \cos \theta_1 \pm E_A [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1}. \quad (2.39)$$

Выражение в квадратных скобках числителя (2.39) должно быть положительным ввиду вещественности  $p_1$ . Это требование налагает ограничение на угол вылета  $\theta_1$ :

$$\sin \theta_1 \leq m_A p_1^* / m_1 p_A. \quad (2.40)$$

Это неравенство не ограничивает углы  $\theta_1$ , если его правая часть превышает единицу, т.е.

$$m_A p_1^* > m_1 p_A.$$

Последнее неравенство можно преобразовать, используя следующие формулы, связывающие импульсы релятивистских частиц с их скоростями в тех же системах отсчета:

$$p_1^* = m_1 v_1^* / \sqrt{1 - (v_1^*)^2}, \quad p_A = m_A v_A^* / \sqrt{1 - (v_A^*)^2}.$$

После несложных преобразований находим неравенство, эквивалентное (2.40):

$$v_1^* > v_A. \quad (2.41)$$

При выполнении (2.41) вещественность  $p_1$  обеспечена при любых значениях  $\theta_1$  из интервала  $[0, \pi]$ . В этом случае модуль  $v_1^*$  скорости частицы 1 в системе покоя нестабильной частицы А превышает модуль скорости  $v_A$  при преобразовании Лоренца в систему отсчета, где частица А движется. Нетрудно убедиться, что в тех же условиях (2.41) первое слагаемое в числителе правой части формулы (2.39) не превышает по модулю второго слагаемого:

$$m_A E_1^* p_A |\cos \theta_1| \leq E_A [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}. \quad (2.42)$$

Неравенство (2.42) исключает отрицательный знак перед корнем в решении (2.39), так как в этом случае значения  $p_1 = |p_1|$  оказались бы отрицательными. Таким образом, при выполнении неравенства (2.41) решение

для  $p_1$  однозначно:

$$p_1 = \frac{m_A E_1^* p_A \cos \theta_1 + E_A [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1}, \quad (2.43)$$

а область допустимых значений  $\theta_1$  находится в геометрических пределах  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ . (2.44)

При выполнении неравенства, обратного неравенству (2.41),

$$v_1^* \leq v_A, \quad (2.45)$$

углы вылета частицы 1 в Л-системе оказываются ограниченными неравенством

$$\sin \theta_1 \leq m_A p_1^* / m_1 p_A \leq 1. \quad (2.46)$$

Если выполнено неравенство (2.45), то имеет место следующее неравенство при любых значениях  $\theta_1$  из интервала (2.44):

$$m_A E_1^* p_A |\cos \theta_1| \geq E_A [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}. \quad (2.47)$$

Это неравенство из-за требования, чтобы  $p_1 = |p_1| > 0$ , исключает отрицательные значения  $\cos \theta_1$  при любом знаке перед корнем в правой части (2.39). Следовательно, угол  $\theta_1$  меньше  $\pi/2$  и ограничен неравенством (2.46), определяющем максимально допустимый угол вылета  $\theta_1$ . При выполнении (2.45) в области изменения угла  $\theta_1$  в пределах

$$0 \leq \theta_1 \leq \arcsin (m_A p_1^* / m_1 p_A) \quad (2.48)$$

импульс  $p_1 = |p_1|$  имеет два значения согласно (2.39).

Полученные выше кинематические соотношения между импульсом частицы 1 и углом ее вылета  $\theta_1$  в Л-системе и кинематические ограничения (2.41), (2.45), (2.48) были установлены аналитическим методом.

Эллипс импульсов. Можно указать очень наглядную геометрическую картину перехода от кинематики распада в системе покоя распадающейся частицы к кинематике в Л-системе, где нестабильная частица движется. Для этого вернемся к уравнению (2.38) и представим его в виде

$$p_1^2 E_A^2 \sin^2 \theta_1 + (p_1 m_A \cos \theta_1 - E_1^* p_A)^2 = (p_1^*)^2 E_A^2. \quad (2.49)$$

Вводя обозначения  $p_1 \sin \theta_1 = p_x$ ,  $p_1 \cos \theta_1 = p_z$ , получаем из (2.49)

$$\frac{p_x^2}{(p_1^*)^2} + \frac{m_A^2}{(p_1^*)^2 E_A^2} \left( p_z - \frac{p_A}{m_A} E_1^* \right)^2 = 1. \quad (2.50)$$

Это уравнение эллипса в переменных  $p_x$ ,  $p_z$  с полуосями

$$a = E_A p_1^* / m_A = p_1^* / \sqrt{1 - v_A^2}, \quad b = p_1^* \quad (2.51)$$

и центром, расположенным на оси  $p_z$  в точке с координатами  $p_x = 0$ ,  $p_z = p_A E_1^* / m_A = v_A E_1^* / \sqrt{1 - v_A^2}$ . Переменные  $p_x$  и  $p_z$  являются по своему смыслу поперечной и продольной компонентой вектора  $p_1$  по отношению к направлению скорости  $v_A$  (ось  $p_z$  направлена вдоль  $v_A$ , см. рис. 2.4). На рис. 2.4 указан вектор  $p_1$ , начало которого находится в точке  $O$ , а конец в одной из точек эллипса. Центр эллипса находится в точке  $O'$ . Расстояние между точками  $O$  и  $O'$  равно  $OO' =$

$= p_A E_1^* / m_A$ . Если  $OO' < a$ , то есть выполнено неравенство  $E_1^* p_A < p_1^* E_A$ , то имеет место ситуация, изображенная на рис. 2.4, а. Если же  $OO' > a$  то выполняется неравенство (2.45) и осуществляется ситуация, изображенная на рис. 2.4, б. При  $v_A = 0$  (т.е. в системе покоя частицы А) эллипс на рис. 2.4, а вырождается в окружность с центром в точке О и радиусом  $p_1^*$ .

Рис. 2.4 наглядно демонстрирует все установленные выше кинематические соотношения между импульсом  $p_1$  и углом вылета  $\theta_1$ . В частности, максимально возможному углу вылета (2.48) отвечает случай на рис. 2.4, б, когда вектор  $p_1$  касателен к эллипсу. При этом значение  $p_1 \doteq |p_1|$  определяется однозначно. При меньших углах вылета прямая, проведенная

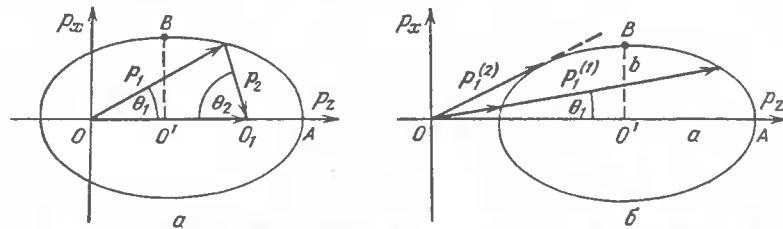


Рис. 2.4. Эллипсы импульсов: а – в случае  $v_1^* > v_A$ , б – в случае  $v_1^* < v_A$

из начала отсчета О под углом  $\theta_1$  к оси  $p_z$ , пересекает эллипс в двух точках. Эти точки и являются концами двух возможных значений векторов  $p_1$  в этом случае.

**Распределения по углу вылета  $\theta_1$ . Случай  $v_1^* > v_A$ .** Связь между энергией  $E_1$  и углом вылета  $\theta_1$  в данном случае однозначна. С помощью формулы (2.43) и соотношения  $E_1 = (m_1^2 + p_1^2)^{1/2}$  находим  $E_1$ :

$$E_1 = \frac{m_A E_1^* E_A + p_A \cos \theta_1 [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1} = \frac{m_A E_1^* + v_A \cos \theta_1 [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A (1 - v_A^2 \cos^2 \theta_1)} \quad (2.52)$$

Формула (2.52) позволяет, совершив замену переменной  $E_1 \rightarrow \cos \theta_1$  в (2.24), найти распределение по косинусу угла вылета  $\theta_1$ :

$$\frac{dw}{d \cos \theta_1} = \frac{m_A p_1^2}{2 p_1^* [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}, \quad (2.53)$$

где  $p_1$  дается формулой (2.43). Распределение событий по телесному углу вылета

$$\frac{dw}{d\Omega_1} = \frac{m_A p_1^2}{4 \pi p_1^* [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}. \quad (2.54)$$

**Распределение по углу вылета  $\theta_1$ . Случай  $v_1^* < v_A$ .** В этом случае связь между  $p_1$ , а следовательно, и между  $E_1$  и  $\theta_1$  двузначная (см. (2.39)). Учитывая (2.39) и соотношение между энергией и импульсом частицы

( $E_1 = \sqrt{m_1^2 + p_1^2}$ ), находим выражение энергии  $E_1$  через  $\cos \theta_1$ :

$$E_1^{(1,2)} = \frac{m_A E_1^* E_A \pm p_A \cos \theta_1 [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1} = \frac{m_A E_1^* \pm v_A \cos \theta_1 [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A (1 - v_A^2 \cos^2 \theta_1)}. \quad (2.55)$$

При вычислении распределения  $dw/d \cos \theta_1$  в данном случае надо учесть оба решения (2.55). После замены переменной  $E_1 \rightarrow \cos \theta_1$  в (2.24) находим

$$\frac{dw}{d \cos \theta_1} = \frac{dw}{dE_1} \left[ \left| \frac{dE_1^{(1)}}{d \cos \theta_1} \right| + \left| \frac{dE_1^{(2)}}{d \cos \theta_1} \right| \right].$$

Производные  $dE_1^{(i)}/d \cos \theta_1$  легко вычисляются:

$$\frac{dE_1^{(i)}}{d \cos \theta_1} = \frac{p_A [p_1^{(i)}]^2}{[m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}. \quad (2.56)$$

В результате распределение по телесному углу имеет вид

$$\frac{dw}{d\Omega_1} = \frac{m_A [(p_1^{(1)})^2 + (p_1^{(2)})^2]}{4 \pi p_1^* [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}. \quad (2.57)$$

Величины  $p_1^{(1,2)}$  определяются формулой (2.39). Записывая в соотношении (2.57) значения  $p_1^{(1,2)}$  в явной форме, окончательно получаем

$$\frac{dw}{d\Omega_1} = \frac{m_A [m_A^2 (E_1^*)^2 v_A^2 \cos^2 \theta_1 + m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]}{2 \pi p_1^* E_A^2 (1 - v_A^2 \cos^2 \theta_1)^2 [m_A^2 (p_1^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}. \quad (2.58)$$

Отметим, что выражение (2.58) содержит в знаменателе правой части корневой множитель, обращающийся в нуль, когда угол достигает предельного значения (2.48). При этом функция распределения (2.58) обращается в бесконечность. Происхождение этой особенности связано с якобианом преобразования (2.56) от переменной энергии  $E_1$  к переменной  $\cos \theta_1$ . Такие особенности называют особенностями якобиана.

Бесконечность корня в выражении (2.58) интегрируема. Поэтому при учете экспериментального разрешения по углу  $\theta_1$  эта особенность превращается в максимум функции распределения тем более резкий, чем лучше экспериментальная точность измерения угла вылета  $\theta_1$ . Формула (2.58) предсказывает, таким образом, что в случае массивных продуктов распада, при условии когда  $v_1^* < v_A$ , наиболее вероятен их вылет под углами  $\theta_1$ , близкими к предельному (2.48).

Напомним, что в случае распада релятивистской частицы на безмассовые продукты наиболее вероятным оказался вылет под углами, близкими к нулю (см. (2.37)).

Угол вылета  $\theta_2$  при фиксированном значении  $\theta_1$ . Измерение угла вылета  $\theta_1$  одного из продуктов двухчастичного распада на лету, как следует из предыдущего рассмотрения, позволяет предсказать импульс (энергию) этой частицы без дополнительных измерений. Конечно, это можно сделать, если известны массы всех частиц, участвующих в про-

цессе, и скорость (энергия, импульс) нестабильной частицы. Покажем, что одновременно можно указать энергию (импульс)  $E_2$  и угол вылета  $\theta_2$  другой вторичной частицы. Вычисление энергии  $E_2$  тривиально:

$$E_2 = E_A - E_1(\cos \theta_1), \quad (2.59)$$

где  $E_1(\cos \theta_1)$  вычисляется по формулам (2.52) или (2.55). Угол  $\theta_2$  при известном угле вылета  $\theta_1$  можно вычислить, используя законы сохранения продольных и поперечных компонент импульсов:

$$p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2 = p_A, \quad p_1 \sin \theta_1 - p_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (2.60)$$

Исключая из уравнения (2.60) импульс  $p_2$ , находим

$$\operatorname{tg} \theta_2 = p_1(\cos \theta_1) \sin \theta_1 / [p_A - p_1(\cos \theta_1) \cos \theta_1]. \quad (2.61)$$

Значение  $p_1(\cos \theta_1)$  в формуле (2.61) вычисляется по формулам (2.43) или (2.39) в зависимости от соотношения между скоростями  $v_1^*$  и  $v_A$ .

Найти направление и модуль вектора  $p_2$  можно также графическим путем с помощью эллипса импульсов (рис. 2.4, а). Для этой цели нужно отложить вдоль оси  $p_z$  значение импульса первичной частицы  $p_A$ , помещая начало вектора  $p_A$  в точку  $O$ . Расстояние между точками  $O$  и  $O'$  (центр эллипса импульсов) равно  $p_A E_1^*/m_A$ . Если от точки  $O'$  отложить в положительном направлении оси  $p_z$  отрезок  $O'O_1 = p_A E_2^*/m_A$ , то длина отрезка  $OO_1$  будет равна модулю импульса  $p_A$ . Импульс  $p_2$  строится по правилу треугольника (рис. 2.4, а), поскольку выполняется закон сохранения импульсов  $p_A = p_1 + p_2$ . Угол  $\theta_2$  указан на рис. 2.4, а, который отвечает неравенству  $v_1^* > v_A$ . Если  $v_1^* < v_A$  (рис. 2.4, б), то импульс  $p_2$  строится аналогичным образом, но с учетом двух возможных значений длины вектора  $p_1$  при фиксированном угле  $\theta_1$ . Таким образом, если известны массы частиц ( $m_A, m_1, m_2$ ) и импульс нестабильной частицы  $p_A$ , то измерение угла вылета  $\theta_1$  одной из вторичных частиц позволяет определить однозначно или двузачно все остальные кинематические характеристики продуктов двухчастичного распада.

#### 2.4. Распределение по углу разлета вторичных частиц при двухчастичном распаде на лету

Двухчастичный распад (2.1) на лету в тех случаях, когда детектируются обе вторичные частицы 1 и 2, можно характеризовать углом разлета вторичных частиц  $\theta_{12}$  ( $\theta_{12}$  — угол между направлениями векторов  $p_1$  и  $p_2$ ). Этот угол связан с энергиями вторичных частиц  $E_1$  и  $E_2$  простым соотношением, вытекающим из законов сохранения энергии и импульса,  $p_A = p_1 + p_2$ . Возводя в квадрат обе части этого равенства и раскрывая скалярное произведение  $(p_1 p_2)$  в Л-системе, находим

$$m_A^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 \cos \theta_{12},$$

откуда следует искомое соотношение

$$\cos \theta_{12} = \frac{E_1 E_2 - (m_A^2 - m_1^2 - m_2^2)/2}{p_1 p_2}. \quad (2.62)$$

Энергия одной из частиц (например, частицы 2) может быть выражена через разность энергии нестабильной частицы  $A$  и частицы 1:  $E_2 = E_A - E_1$ . Поэтому соотношение (2.62) представляет угол разлета  $\theta_{12}$  через энергию одной из частиц, если значение  $E_A$  фиксировано и известны массы частиц  $A, 1$  и  $2$ :

$$\cos \theta_{12} = \frac{E_1(E_A - E_1) - (m_A^2 - m_1^2 - m_2^2)/2}{\{[E_1^2 - m_1^2][(E_A - E_1)^2 - m_2^2]\}^{1/2}}. \quad (2.63)$$

Следует указать, что в общем случае (когда  $m_1, m_2 \neq 0$ ) обратная связь  $E_1(\cos \theta_{12})$  оказывается весьма сложной. Явный вид зависимости  $E_1(\cos \theta_{12})$  находится решением уравнения 4-й степени относительно  $E_1$  (см. (2.63)). Зависимость  $E_1(\cos \theta_{12})$  ничем не примечательна. Поэтому мы ее здесь находить не будем, отсылая заинтересованного читателя к руководствам [6, 7].

Угол разлета в частном случае распада на две безмассовые детектируемые частицы (это, конечно,  $\gamma$ -кванты) оказывается очень важной и примечательной кинематической характеристикой процесса. В этом случае ( $m_1 = m_2 = 0$ ) формула (2.63) существенно упрощается:

$$\cos \theta_{12} = 1 - m_A^2 / (2E_1(E_A - E_1)), \quad (2.64)$$

а уравнение для определения зависимости  $E_1(\cos \theta_{12})$  оказывается квадратным:

$$E_1^2(1 - \cos \theta_{12}) - E_1 E_A(1 - \cos \theta_{12}) + m_A^2/2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$E_1^{(1,2)} = (1/2)\{E_A \pm [E_A^2 - 2m_A^2/(1 - \cos \theta_{12})]\}^{1/2}. \quad (2.65)$$

Оба решения имеют физический смысл, поскольку энергия второй безмассовой частицы  $E_2 = E_A - E_1$  и, соответственно, равна

$$E_2 = (1/2)\{E_A \mp [E_A^2 - 2m_A^2/(1 - \cos \theta_{12})]\}^{1/2}. \quad (2.66)$$

Сравнивая (2.65) и (2.66), убеждаемся в том, что решение (2.65) позволяет при выборе определенного знака перед квадратным корнем указать энергию частицы-партнера, выбирая противоположный знак перед тем же радикалом. Решения (2.65) и (2.66) имеют физический смысл только при положительной определенности подкоренного выражения:

$$E_A^2 - 2m_A^2/(1 - \cos \theta_{12}) \geq 0. \quad (2.67)$$

Неравенство (2.67) ограничивает значение угла разлета снизу

$$\sin(\theta_{12}/2) \geq m_A/E_A. \quad (2.68)$$

В другой форме ограничение (2.67) имеет вид

$$\cos \theta_{12} \leq 1 - 2m_A^2/E_A^2. \quad (2.69)$$

Если нестабильная частица  $A$  покоится ( $E_A = m_A$ ), то из (2.68) и (2.69) следует, что угол разлета  $\theta_{12} = \pi$ , как и должно быть в системе покоя частицы  $A$ .

Ограничения (2.68), (2.69) свидетельствуют о том, что при двухчастичном распаде на лету на безмассовые частицы угол разлета этих частиц не

может быть меньше, чем

$$(\theta_{12})_{\min} = 2 \arcsin(m_A/E_A). \quad (2.70)$$

Значение угла разлета (2.70) называют минимальным углом разлета. С ростом энергии нестабильной частицы  $E_A$  минимальный угол разлета уменьшается. Для ультррелятивистской частицы  $A$ , когда  $E_A \gg m_A$ ,

$$(\theta_{12})_{\min} \approx 2m_A/E_A.$$

Установленная зависимость  $E_1(\cos \theta_{12})$  позволяет предсказать распределение событий распада по углу разлета исходя из известного распределения (2.24) одной из безмассовых частиц по энергии  $E_1$ :

$$dw/dE_1 = m_A/2p_A E_1^* = 1/p_A. \quad (2.71)$$

Здесь по сравнению с формулой (2.24) учтено, что при  $m_1, m_2 = 0$ ,  $|p_1^*| = E_1^* = m_A/2$ .

Дифференцируя  $E_1$  по переменной  $\cos \theta_{12}$  и складывая модули якобианов преобразования  $E_1 \rightarrow \cos \theta_{12}$ , отвечающие двум решениям (2.65) для зависимости  $E_1(\cos \theta_{12})$ , получаем

$$\frac{dw}{d \cos \theta_{12}} = \frac{m_A^2}{p_A (1 - \cos \theta_{12})^2 [E_A^2 - 2m_A/(1 - \cos \theta_{12})]^{1/2}}, \quad (2.72)$$

$$-1 \leq \cos \theta_{12} \leq 1 - (2m_A^2/E_A^2).$$

Распределение (2.72) можно представить также в более компактной форме:

$$\frac{dw}{d\theta_{12}} = \frac{(1 - v_A^2) \cos(\theta_{12}/2)}{2v_A \sin^2(\theta_{12}/2) [\sin^2(\theta_{12}/2) - m_A^2/E_A^2]^{1/2}}, \quad (2.73)$$

$$(\theta_{12})_{\min} \leq \theta_{12} \leq \pi.$$

Распределения (2.72) и (2.73) содержат в знаменателе корневую функцию, обращающуюся в нуль, когда угол разлета  $\theta_{12}$  достигает минимального значения (2.70). При этом формулы (2.72), (2.73) предсказывают неограниченное увеличение плотности вероятности событий, характеризующихся минимальным углом разлета. Это свойство распределений (2.72), (2.73) связано с особенностью якобиана преобразования  $E_1 \rightarrow \cos \theta_{12}$ . Указанная особенность интегрируема. Учет экспериментального разрешения при измерении углов разлета (т.е. интегрирование плотности распределения по интервалам  $\Delta\theta_{12}$ , отвечающим погрешности в измерениях) устраняет бесконечность. Чем лучше точность измерения угла  $\theta_{12}$ , тем более ярко должен проявляться эффект особенности якобиана — преимущественной концентрации событий вблизи минимального угла разлета (2.70).

Проанализируем в заключение этого раздела вопрос о геометрической конфигурации импульсов безмассовых вторичных частиц  $p_1$  и  $p_2$  относительно направления импульса  $p_A$  в условиях, когда угол разлета  $\theta_{12}$  минимален. При  $\theta_{12} = (\theta_{12})_{\min}$  энергии вторичных частиц одинаковы (см. (2.65)):  $E_1 = E_2 = E_A/2$  одинаковы и модули их импульсов  $p_1 = p_2 = E_A/2$ .

Из закона сохранения импульса вдоль направления, перпендикулярного направлению вектора  $p_A$ , вытекает, что

$$p_1 \sin \theta_1 = p_2 \sin \theta_2. \quad (2.74)$$

Поскольку  $p_1 = p_2$  при  $\theta_{12} = (\theta_{12})_{\min}$ , это равенство свидетельствует о симметричном расположении импульсов  $p_1$  и  $p_2$  относительно направления вектора  $p_A$ :  $\theta_1 = \theta_2$  (рис. 2.5).

Из (2.74) следует, что при симметричном вылете безмассовых частиц ( $\theta_1 = \theta_2$ ) относительно направления  $p_A$  их импульсы по модулю должны совпадать,  $p_1 = p_2$ . Из закона сохранения энергии вытекает, что в этом

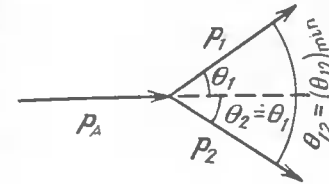


Рис. 2.5. Конфигурация импульсов двух безмассовых частиц при минимальном возможном угле разлета

случае  $E_1 = p_1 = E_2 = p_2 = E_A/2$ , а из закона сохранения импульса в продольном относительно вектора  $p_A$  направлении при симметричном вылете следует соотношение

$$p_A = p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2 = E_A \cos \theta_1 = E_A \cos(\theta_{12}/2),$$

так как  $\theta_{12} = 2\theta_1$ . Таким образом, угол разлета  $\theta_{12}$  определяется равенством  $\cos(\theta_{12}/2) = p_A/E_A$ , которое эквивалентно равенству  $\sin(\theta_{12}/2) = m_A/E_A$ . Последнее соотношение доказывает утверждение о том, что при симметричном вылете безмассовых продуктов двухчастичного распада на лету нестабильной частицы они разлетаются под минимально возможным углом разлета (см. (2.68)).

## 2.5. Распределение продуктов двухчастичного распада по поперечному импульсу

В этом разделе будет показано, что распределение одного из продуктов двухчастичного распада (2.1) по поперечной компоненте импульса обладает особенностью, позволяющей не только детектировать такие распады, но и судить о массе нестабильной частицы в условиях, когда измерение спектра эффективных масс продуктов распада невозможно из-за специфики условий физического эксперимента. Этот простой метод стал широко известен сравнительно недавно в связи с поисками кванта слабого взаимодействия — массивного  $W^\pm$ -бозона на серпуховском ускорителе (см., например, [12–14]) и особенно в связи с проектами поиска этого объекта [15, 16] и его обнаружением в экспериментах на  $pp$ -коллайдере (1983 г.) по наблюдению электронов (позитронов) с очень большими поперечными импульсами ( $p_\perp \approx 40$  ГэВ/с).

В разделах 2.3 и 2.4 было установлено, что при определенных условиях в распределениях продуктов двухчастичных распадов по углам вылета

или разлета могут наблюдаться особенности чисто кинематического происхождения, обязанные обращению в бесконечность якобиана преобразования от одних кинематических переменных к другим. Кроме уже рассмотренных случаев, можно указать еще один имеющий практическое значение способ преобразования кинематических переменных, а именно переход от угла вылета вторичной частицы  $\theta_1^*$  в системе покоя нестабильной частицы  $A$  в двухчастичном распаде (2.1) к поперечному импульсу этой частицы

$$k_{\perp} = p_1^* \sin \theta_1^*, \quad (2.75)$$

где  $k_{\perp}$  — модуль составляющей импульса  $p_1^*$  вторичной частицы в плоскости, перпендикулярной направлению скорости  $v_A$  первичной частицы (см. рис. 2.1). При релятивистских преобразованиях вдоль (или против) направления вектора  $v_A$  поперечный вектор  $k_{\perp}$  остается неизменным. Поэтому его модуль ( $k_{\perp}$ ) можно выразить через кинематические переменные  $(p_1, \theta_1)$  частицы 1 в системе отсчета, где частица  $A$  движется:

$$k_{\perp} = p_1 \sin \theta_1. \quad (2.76)$$

Таким образом, величина  $k_{\perp}$  может быть измерена в той системе отсчета, где наблюдается распад (2.1), если известно направление  $v_A$ . Другие кинематические характеристики частицы  $A$  в таком подходе оказываются излишними.

Распределение событий по переменной  $k_{\perp}$  (в случае бесспиновых или неполяризованных частиц) можно предсказать на основе их углового распределения в системе покоя частицы (2.23). Для этого необходимо совершить замену переменной  $\cos \theta_1^* \rightarrow k_{\perp}$ . На основе (2.75) находим связь между  $\cos \theta_1^*$  и  $k_{\perp}$ :

$$\cos \theta_1^* = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1^*} = \pm \sqrt{1 - (k_{\perp}/p_1^*)^2}. \quad (2.77)$$

Связь (2.77) двузначная. Это означает, что при замене переменной  $\cos \theta_1^*$  на  $k_{\perp}$  нужно учесть оба случая связи и сложить результаты. Якобианы преобразования при этом учитываются только по модулю:

$$|d \cos \theta_1^* / dk_{\perp}| = k_{\perp} / p_1^* \sqrt{(p_1^*)^2 - k_{\perp}^2}. \quad (2.78)$$

Учитывая (2.78), из (2.23) находим

$$dw/dk_{\perp} = k_{\perp} / p_1^* \sqrt{(p_1^*)^2 - k_{\perp}^2}. \quad (2.79)$$

При получении (2.79) учтена двузначность связи (2.77) и одинаковость модулей якобианов преобразований для обоих случаев связи. Это приводит к сокращению множителя 2 в знаменателе правой части формулы (2.23) при переходе к переменной  $k_{\perp}$ . Нетрудно убедиться в том, что распределение (2.79) нормировано на единицу так же как и исходное распределение (2.23). Пределы, в которых может изменяться значение  $k_{\perp}$  в формуле (2.79), очевидны:

$$0 \leq k_{\perp} \leq p_1^*. \quad (2.80)$$

Вблизи верхнего предела плотность распределения (2.79) стремится к

бесконечности из-за обращения в нуль подкоренного выражения в знаменателе. Эта особенность (2.79) связана с особенностью якобиана преобразования от одной кинематической переменной к другой (2.78). Поэтому можно сказать, что ее происхождение чисто кинематическое.

С учетом равномерного распределения по азимутальному углу  $\varphi_1$  распределение (2.79) преобразуется в распределение по компонентам поперечного импульса  $k_{\perp} = (k_x, k_y) = (k_{\perp} \cos \varphi_1, k_{\perp} \sin \varphi_1)$ :

$$dw/dk_{\perp} = \{2\pi p_1^* [(p_1^*)^2 - k_{\perp}^2]^{1/2}\}^{-1}, \quad (2.81)$$

$$dk_{\perp} = dk_x dk_y = k_{\perp} dk_{\perp} d\varphi_1.$$

Таким образом, распределения (2.79), (2.81) предсказывают (с учетом конечного экспериментального разрешения  $\Delta k_{\perp}$  при измерении поперечного импульса вторичной частицы) концентрацию событий вблизи максимально возможного значения  $k_{\perp}$ , равного  $p_1^*$  (см. (2.80)).

При изотропном угловом распределении событий в системе покоя частицы  $A$  (2.23) в область значений  $k_{\perp}$  от  $p_1^*/2$  до  $p_1^*$ , согласно соотношению (2.79), должно попадать около 85% событий. Это предсказание очень существенно для идентификации нестабильных частиц в тех случаях, когда известно направление их движения ( $v_A$ ), но не известна их масса.

Действительно, максимальное значение поперечного импульса  $k_{\perp}$  наблюдаемого продукта двухчастичного распада составляет  $(k_{\perp})_{\max} = p_1^*$ , а величина  $p_1^*$  выражается через массы частиц, участвующих в процессе распада:

$$p_1^* = (1/2 m_A) [m_A^2 - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [m_A^2 - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}$$

(см. (2.7)). Наблюдая концентрацию событий вблизи некоторого значения  $k_{\perp}$ , нетрудно оценить массу нестабильной частицы  $A$  ( $m_A$ ), если массы продуктов распада ( $m_1$  и  $m_2$ ) известны. В случаях когда частица  $A$  очень тяжёлая по сравнению с продуктами распада (т.е.  $m_A \gg m_1 + m_2$ ), положение указанной особенности в спектре (2.79) или (2.81) определяется только массой нестабильной частицы:

$$(k_{\perp})_{\max} \approx m_A/2. \quad (2.82)$$

Этот простой, но очень важный результат, наряду с другими, полученными в предыдущих разделах, не может не вызывать глубокого уважения к кинематическим методам теории, которые, по сути дела, опираются лишь на самые общие, не зависящие от динамики закономерности процессов взаимодействия элементарных частиц. Что касается применения в кинематике статистической гипотезы, то ее использование наиболее оправдано как раз в случае двухчастичных распадов, когда существенные кинематические переменные (релятивистские инварианты, составленные из скалярных произведений 4-импульсов частиц) выражаются через массы частиц, участвующих в процессе. В таких условиях свойство изотропии двухчастичного распада (2.10) в системе покоя нестабильной частицы, как уже отмечалось, строго выполняется для бесспиновых или неполяризованных частиц. Спиновая поляризация нестабильной частицы, в принципе, может нарушать изотропию распада за счет корреляций импульсов вторичных частиц с век-



тором поляризации первичной частицы. Однако такие корреляции не разрушают в большинстве случаев отмеченные выше особенности спектров продуктов распада. Наличие спинов у продуктов распада после суммирования по всевозможным спиновым состояниям (фактически по возможным значениям проекций спинов частиц на ось квантования) приводит к тому, что квадрат модуля инвариантной амплитуды распада  $|M|^2$  не зависит от корреляций между спинами вторичных частиц и их импульсами [11], что также не нарушает изотропию двухчастичного распада.

## 2.6. Примеры использования кинематических закономерностей в физике распадов элементарных частиц

В данном разделе для иллюстрации практических применений кинематических соотношений рассматривается несколько простых примеров, позволяющих оценить возможности кинематики и необходимость ее творческого изучения и применения в исследованиях.

**Кинематика нейтринных пучков.** Нейтринные пучки широко применяются в современной физике частиц высоких энергий для изучения закономерностей слабых взаимодействий нейтрино с нуклонами и электронами вещества. Нейтринные каналы созданы и работают на всех имеющихся протонных ускорителях, рассчитанных на энергии порядка 10 ГэВ и выше. Эксперименты с нейтрино высоких энергий позволили сделать целый ряд принципиальных физических открытий. Было доказано существование электронного и мюонного нейтрино и процессов слабого взаимодействия нейтральных лептонных и адронных токов, обнаружение которых явилось сильным аргументом в пользу единой теории электрослабого взаимодействия [11]. Проведенное изучение процессов глубоко неупругого взаимодействия нейтрино с нуклонами позволило существенно уточнить и расширить представления о кварк-партоновой структуре нуклонов [11]. На основе данных о нейтрино-нуклонных взаимодействиях через слабые нейтральные и заряженные токи были предсказаны массы квантов слабого взаимодействия  $W^\pm$  и  $Z$ -бозонов [11], что позволило провести их целенаправленный поиск на  $p\bar{p}$ -коллайдере, завершившийся открытием этих частиц. Этот далеко не полный перечень достижений нейтринной физики свидетельствует об исключительной научной ценности исследований взаимодействия нейтрино с веществом.

В основе научно-технических проблем создания пучков нейтрино (анти-нейтрино) на протонных ускорителях лежат кинематические закономерности двухчастичных лептонных распадов заряженных пионов и каонов:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu), \quad K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu), \quad (2.83)$$

которые являются основными источниками мюонных нейтрино и антинейтрино. Заряженные пионы и каоны, в свою очередь, возникают в реакциях взаимодействия высокоэнергетических протонов с ядрами мишени (множественные процессы) [17, 18]. Используем полученные в этой главе результаты анализа двухчастичных распадов для получения ответов на самые простые, но важные вопросы: 1) каков спектр энергий нейтрино (анти-нейтрино) в распадах пионов и каонов (2.83), обладающих одинаковыми

энергиями в Л-системе; 2) какая часть энергетического спектра пионов и каонов дает вклад в образование нейтрино данной энергии  $E_\nu$ ; 3) под какими углами относительно направления движения пиона (каона) образуются вторичные нейтрино. Ответ на первый вопрос содержится в формулах (2.20), (2.21), где  $E_A = E_{\pi,K}$  — энергия пиона или каона,  $|p_A| = p_{\pi,K}$  — модуль импульса пиона или каона,  $E_1 = E_{\nu,\bar{\nu}}$  — энергия нейтрино (анти-нейтрино) в Л-системе,  $E_1^* = |p_1^*| = E_{\nu,\bar{\nu}}^*$  — энергия нейтрино (антинейтрино) в системе покоя пиона (каона),  $m_A = m_{\pi,K}$  — масса пиона или каона. Учитывая, что, согласно (2.7),

$$E_{\nu,\bar{\nu}}^* = (m_{\pi,K}^2 - m_\mu^2)/2m_{\pi,K},$$

где  $m_\mu$  — масса мюона, находим, что энергия нейтрино (антинейтрино) в Л-системе при заданной энергии пиона (каона) в той же системе изменится в следующих пределах:

$$\frac{E_{\nu,\bar{\nu}}^*(E_{\pi,K} - p_{\pi,K})}{m_{\pi,K}} \leq E_{\nu,\bar{\nu}} \leq \frac{E_{\nu,\bar{\nu}}^*(E_{\pi,K} + p_{\pi,K})}{m_{\pi,K}},$$

или, преобразуя выражение для нижнего предела к более удобной форме и подставляя вместо энергии  $E_{\nu,\bar{\nu}}^*$  ее выражение через массы частиц, находим

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{m_{\pi,K}^2} \right) \frac{m_{\pi,K}^2}{E_{\pi,K} + p_{\pi,K}} \leq E_{\nu,\bar{\nu}} \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{m_{\pi,K}^2} \right) (E_{\pi,K} + p_{\pi,K}). \quad (2.84)$$

Так как  $m_\mu^2/m_{\pi}^2 \approx 0,57$ , а  $m_\mu^2/m_K^2 \approx 0,046$ , то энергия нейтрино (анти-нейтрино) от распадов пионов может изменяться в пределах

$$0,215(E_\pi - p_\pi) \leq E_{\nu,\bar{\nu}}^{(\pi)} \leq 0,215(E_\pi + p_\pi),$$

а энергия нейтрино от распадов каонов — в пределах

$$0,477(E_K - p_K) \leq E_{\nu,\bar{\nu}}^{(K)} \leq 0,477(E_K + p_K).$$

В ультрарелятивистском случае, когда  $E_{\pi,K} \gg m_{\pi,K}$ , формулы упрощаются:

$$(0,0021/E_\pi) \leq E_{\nu,\bar{\nu}}^{(\pi)} \leq 0,43 E_\pi, \quad (2.85)$$

$$(0,058/E_K) \leq E_{\nu,\bar{\nu}}^{(K)} \leq 0,954 E_K.$$

В формулах (2.85) энергии частиц измеряются в гигаэлектронвольтах. Как видно из формул (2.85) нейтрино (антинейтрино), возникшее при распаде каона, может приобрести почти всю энергию каона, а нейтрино от распада пиона лишь несколько меньше половины энергии пиона. Следовательно, можно ожидать, что наиболее энергичные нейтрино (антинейтрино) являются продуктами каонных распадов (2.83). Для того чтобы окончательно в этом убедиться, рассмотрим второй из поставленных выше вопро-

сов. Для этого нужно разрешить неравенства (2.84) относительно энергии пиона (каона)  $E_{\pi, K}$ . Простые выкладки приводят к неравенству

$$E_{\pi, K} \geq m_{\pi, K} [E_{\nu, \bar{\nu}}^2 - (E_{\nu, \bar{\nu}}^*)^2] / (2 E_{\nu, \bar{\nu}} \cdot E_{\nu, \bar{\nu}}^*). \quad (2.86)$$

Из (2.86) заключаем, что для образования нейтрино (антинейтрино) с энергией  $E_{\nu, \bar{\nu}}$  необходимо, чтобы энергия пионов удовлетворяла неравенству

$$E_{\pi} \geq 2,32 [E_{\nu, \bar{\nu}} - (9 \cdot 10^{-4} / E_{\nu, \bar{\nu}})], \quad (2.87)$$

а энергия каонов — неравенству

$$E_K \geq 1,05 [E_{\nu, \bar{\nu}} - (0,055 / E_{\nu, \bar{\nu}})]. \quad (2.88)$$

В формулах (2.87), (2.88) все энергии измеряются в гигаэлектронвольтах. Таким образом, для того чтобы образовалось нейтрино (антинейтрино) с энергией  $E_{\nu, \bar{\nu}}$  пиону нужно, как минимум, обладать энергией, более чем вдвое превышающей энергию нейтрино. В то же время каону требуется для этого энергия, всего лишь на 5% превышающая энергию нейтрино. Заметим, что энергетические спектры пионов и каонов, образованных в множественных процессах, очень быстро падают с ростом энергии этих мезонов [17, 18]. В то же время среди продуктов процессов множественного образования адронов преобладают пионы (около 80%), а выход каонов сравнительно мал (около 10%). Действие этих факторов совместно с ограничениями (2.87), (2.88) и приводит к тому, что в высокоэнергетической части спектра нейтрино (антинейтрино) преобладает вклад от распадов каонов, а в сравнительно низкоэнергетической части — вклад от распада пионов. Этот результат следует учитывать при проектировании нейтринных пучков.

Рассмотрим теперь третий вопрос об углах вылета нейтрино в распадах (2.83) относительно направлений векторов импульсов пионов и каонов  $\mathbf{p}_{\pi}, \mathbf{p}_K$ . Угловое распределение безмассового продукта двухчастичного распада рассматривалось в разделе 2.3 (см. (2.31), (2.37)). Было установлено, что в случае ультрарелятивистских "родителей" безмассовой частицы, эффективный конус углов, под которыми образуются такие частицы в Л-системе ограничен неравенством  $\theta \leq m_A / E_A$ . В случае распадов (2.83) соответствующие ограничения имеют вид

$$\theta_{\nu, \bar{\nu}}^{(\pi, K)} \leq m_{\pi, K} / E_{\pi, K} \quad (2.89)$$

Здесь  $\theta_{\nu, \bar{\nu}}^{(\pi, K)}$  — угол вылета нейтрино (антинейтрино), образовавшегося от распада пиона или каона. Из ограничений (2.89) видно, что при одинаковых энергиях пиона и каона ( $E_{\pi} = E_K$ ), угловой раствор конуса, в котором находятся векторы импульсов нейтрино, шире в  $(m_K / m_{\pi}) \approx 3,5$  раза для каонных распадов по сравнению с пионными.

В случае монохроматических пионных и каонных пучков угол вылета нейтрино (антинейтрино) с энергией  $E_{\nu, \bar{\nu}}$  можно указать однозначно с помощью формулы (2.32), которую в случае  $E_{\pi} \gg m_{\pi}$  и  $E_K \gg m_K$  можно

представить в виде

$$\cos \theta_{\nu, \bar{\nu}} = 1 + \frac{m_{\pi, K}^2}{2 E_{\pi, K}^2} - \frac{m_{\pi, K}^2 - m_{\mu}^2}{2 E_{\nu, \bar{\nu}} E_{\pi, K}}.$$

Учитывая близость  $\cos \theta_{\nu, \bar{\nu}}$  к единице, для угла вылета  $\nu (\bar{\nu})$  находим следующую приближенную формулу:

$$\theta_{\nu, \bar{\nu}} \approx \frac{m_{\pi, K}}{E_{\pi, K}} \left[ \left( 1 - \frac{m_{\mu}^2}{m_{\pi, K}^2} \right) \left( \frac{E_{\pi, K}}{E_{\nu, \bar{\nu}}} \right) - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.90)$$

Из соотношения (2.90) видно, что нейтрино (антинейтрино) с максимально возможными энергиями (см. (2.85)) вылетают под углом  $\theta_{\nu, \bar{\nu}} = 0$ , т.е. вдоль направления импульса пиона  $\mathbf{p}_{\pi}$  или каона  $\mathbf{p}_K$ . Поскольку от угла вылета нейтрино зависит его попадание в детектор, эта характеристика очень важна при проектировании нейтринных каналов на ускорителях протонов. Конечно, для проведения полного расчета импульсно-углового спектра нейтрино необходимо знать импульсно-угловые спектры нейтринных "родителей" (заряженных пионов и каонов), однако без знания кинематики двухчастичного распада здесь не обойтись. Более того, чисто кинематические соотношения (2.85) — (2.90) дают возможность качественно установить главные физические свойства проектируемого пучка нейтрино, а именно спектр ожидаемых энергий и угловую расходимость пучка. Такая информация представляется достаточно полезной и важной.

Распады нейтральных мезонов на два фотона. При изучении процессов распада нейтральных мезонов ( $\pi^0, \eta^0$  и др.) на два фотона ( $\gamma$ ) не всегда удается измерить энергию вторичных фотонов и установить методом расчета эффективной массы двухфотонной системы, какая частица испытала такой распад. В частности, экспериментальное открытие  $\pi^0$  и  $\eta^0$  мезонов было осуществлено в условиях, когда измерялись только углы разлета двух фотонов в реакции (см. также [6])

$$\pi^- + p \rightarrow n + X^0 (\rightarrow 2 \gamma). \quad (2.91)$$

При этом импульс первичных пионов был известен, что позволяло зафиксировать энергию частицы  $X^0$  в Ц-системе реакции (2.91), как функцию ее массы  $m_X$ :

$$E_X^* = (s + m_n^2 - m_X^2) / 2 \sqrt{s}, \quad s = m_p^2 + m_{\pi}^2 + 2 m_p E_{\pi},$$

$m_p, m_n, m_{\pi}$  — массы протона, нейтрона, пиона соответственно,  $E_{\pi}$  — энергия первичного пиона.

Другой способ фиксирования энергии частицы  $X^0$  может состоять в регистрации пары  $\gamma$ -квантов детекторами, расположенными в Л-системе в плоскости, перпендикулярной пучку пионов. Такое расположение детекторов фиксирует угол вылета частицы  $X^0$  в Л-системе ( $\theta_X = 90^\circ$ ), что позволяет с помощью соотношений (2.52) или (2.55) определить энергию частицы  $X^0$  в зависимости от ее массы. При такой процедуре в формулах

(2.52) надо положить  $p_A = p_\pi$  ( $p_\pi$  — импульс пиона в Л-системе реакции (2.91)), а  $E_A = E_\pi + m_p$ ,  $v_A = p_\pi / (E_\pi + m_p)$ . Первый способ был применен при открытии  $\eta^0$ -мезона, а второй — при открытии  $\pi^0$ -мезона еще в 1950 г.

В первом случае изучается распределение  $\gamma$ -квантов по углу разлета в Ц-системе реакции (2.91). Перевод углов вылета фотонов из Л-системы в Ц-систему в данном случае элементарен и выполняется с помощью формулы релятивистского преобразования

$$\cos \theta_\gamma^* = (\cos \theta_\gamma - v_A) / (1 - v_A \cos \theta_\gamma), \quad (2.92)$$

которая следует из формулы (2.36). В (2.92) скорость  $v_A$  есть скорость движения центра инерции относительно Л-системы:

$$v_A = p_\pi / (E_\pi + m_\pi).$$

Распределение событий по углу разлета двух фотонов при фиксированной энергии  $E_X$  нестабильной частицы  $X^0$  должно характеризоваться концентрацией событий вблизи минимально возможного значения угла разлета (см. (2.73), (2.70))

$$(\theta_{\gamma\gamma})_{\min} = 2 \arcsin(m_X / E_X).$$

При меньших значениях этого угла события не должны наблюдаться (за исключением каких-то фоновых событий, которые заранее следует вычистить из полной статистики).

Указанная качественная картина событий и наблюдалась экспериментально. Измеренное значение угла  $\theta_{\gamma\gamma}$  позволяло установить массу нестабильной частицы, распавшейся на два фотона.

Указанная методика измерения массы нестабильных частиц, распадающихся на две безмассовые частицы, основана целиком на чисто кинематических результатах.

Распределение по поперечным импульсам в двухчастичных распадах тяжелых частиц и измерение их массы. В разделе 2.5 было показано, что распределение событий по поперечным импульсам в двухчастичном распаде обладает характерной особенностью: события должны концентрироваться вблизи максимально возможного значения поперечного импульса (см. (2.79), (2.81)), который особенно просто связан с массой нестабильной частицы (см. (2.82)), если она гораздо тяжелее, чем продукты распада. Изучать такие распределения с целью определения массы нестабильной частицы нецелесообразно, если наблюдаются оба продукта распада и измеряются их импульсы и углы вылета. Распределение по поперечному импульсу дает ценную информацию в, казалось бы, совершенно безнадежных условиях, когда одна из вторичных частиц не наблюдается (например, нейтрино), а о первичной частице имеются сведения о направлении ее движения, но неизвестен импульс. В таких условиях измерение импульса и угла вылета только одной из вторичных частиц и набор достаточной статистики событий позволяют построить распределение по  $k_\perp = p_1 \cos \theta_1$  и по наблюдаемой концентрации событий вблизи некоторого значения  $k_\perp$  установить массу нестабильного состояния.

Примером таких ситуаций могут служить лептонные распады промежуточного  $W^\pm$ -бозона (кванта слабого взаимодействия через заряженные

токи):

$$W^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e), \quad W^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu).$$

Если направление импульса  $W^\pm$ -бозона известно, то распределение лептонов  $l^\pm (e^\pm, \mu^\pm)$  по их поперечному относительно этого направления импульсу должно иметь вид (с учетом того, что  $m_W \gg m_e, m_\mu$ )

$$dw/dk_\perp = 2 k_\perp / m_W \sqrt{(m_W/2)^2 - k_\perp^2}$$

и по концентрации событий вблизи значения  $k_\perp \approx m_W/2$  можно "измерить" массу  $W$ -бозона. Эта формула, однако, не учитывает, по крайней мере, два обстоятельства. 1.  $W$ -бозон является нестабильной частицей с полной распадающей шириной, составляющей  $\Gamma_W \approx 3$  ГэВ. Это означает, что распределение (2.93) следует умножить на спектр масс (1.38), результат проинтегрировать по  $m_W^2$  и по необходимости нормировать на единицу. Такая операция приведет к появлению, вместо корневой особенности в знаменателе (2.93), максимума вблизи значения  $k_\perp \approx m_W/2$  (параметр  $m_W$  здесь соответствует положению  $M_0$  максимума в спектре (1.38)). Если ширина  $\Gamma_W \ll m_W$ , то распределение (1.38) оказывается очень узким, что, в свою очередь обуславливает достаточную резкость максимума распределений событий по  $k_\perp$ . 2. Вклад в уширение этого максимума вносит экспериментальная погрешность в измерении  $k_\perp$  и, в особенности, разброс импульсов  $W$ -бозонов около некоторого направления. Последний эффект целиком определяется динамикой процесса образования  $W$ -бозона. Как показывают различные модельные оценки [12 — 16] в нейтрино-нуклонных, нуклон-нуклонных, антинуклон-нуклонных процессах, угловое распределение  $W^\pm$ -бозонов уширяет, но не "размывает" обсуждаемый максимум, если определять поперечный импульс вторичных лептонов относительно направления первичного пучка или оси соударения в Ц-системе реакции. Реальный эксперимент подтверждает эти выводы.

В заключение этой главы авторы хотели бы высказать свое убеждение в том, что простота и физическая ясность кинематических закономерностей двухчастичных распадов делают их мощным методическим и научным средством в исследованиях и поисках новых частиц.

# КИНЕМАТИКА ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РАСПАДОВ

## 3.1. Трехчастичный распад в системе покоя нестабильной частицы. Кинематические переменные и ограничения

Распад нестабильной частицы  $A$  на три вторичные частицы

$$A \rightarrow 1 + 2 + 3 \quad (3.1)$$

возможен, если  $m_A > m_1 + m_2 + m_3$ , где  $m_A, m_1, m_2, m_3$  — массы частиц. В системе покоя частицы  $A$  импульсы частиц 1, 2, 3 образуют треугольник

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^* = 0 \quad (3.2)$$

вследствие закона сохранения импульса. Этот треугольник ориентирован в пространстве произвольным образом, причем плоскость треугольника может вращаться вокруг любой из сторон, например  $\mathbf{p}_1^*$  (азимутальная симметрия по углу вращения  $\varphi_2^*$ ), а эта сторона произвольно ориентирована в пространстве относительно направления скорости преобразования  $\mathbf{u}_A$  в систему отсчета, где частица  $A$  движется. Эта ориентация характеризуется полярным углом  $\theta_1^*$  и азимутальным углом  $\varphi_1^*$  (рис. 3.1). Углы  $\varphi_2^*, \varphi_1^*, \theta_1^*$  изменяются в пределах

$$0 \leq \varphi_2^* \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_1^* \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1^* \leq \pi.$$

Эти переменные являются несущественными (см. раздел 1.4), так как зависимость от них определяется симметрией задачи, а не динамикой про-

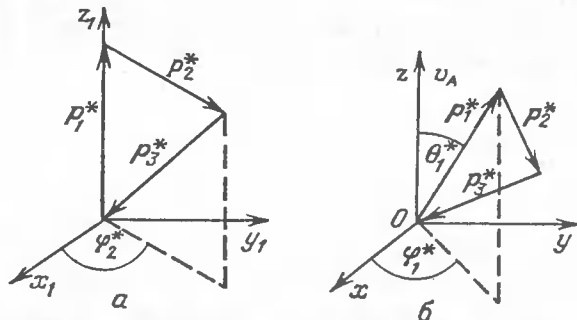


Рис. 3.1. Координаты, характеризующие ориентацию плоскости импульсов вторичных частиц в трехчастичном распаде; угол  $\varphi_2^*$  определяет азимутальную симметрию импульсной плоскости относительно вращений вокруг направления вектора  $\mathbf{p}_1^*$ , сферические угловые координаты  $\theta_1^*$  и  $\varphi_1^*$  вектора  $\mathbf{p}_1^*$  характеризуют сферическую симметрию относительно вращений вектора  $\mathbf{p}_1^*$  вокруг центра симметрии 0

цесса. Процесс (3.1) характеризуется пятью кинематическими переменными ( $3n - 4 = 5$ ), где  $n = 3$  — число частиц в конечном состоянии (см. раздел 1.4). Из пяти переменных три — несущественные. Существенные переменные, от которых зависит квадрат модуля  $|M|^2$  инвариантной амплитуды процесса  $M$ , могут быть представлены в инвариантной форме через скалярные произведения 4-импульсов частиц, участвующих в распаде. Таких переменных должно быть две. Например,  $s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2$  — квадрат эффективной массы компаунд-частицы (2+3),  $s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2$  — квадрат эффективной массы компаунд-частицы (1+2). Переменные  $s_{ik}$  ( $i \neq k, i, k = 1, 2, 3$ ) связаны между собой соотношением

$$s_{12} + s_{23} + s_{13} = m_A^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (3.3)$$

из которого следует, что только две инвариантные переменные являются независимыми. Соотношение (3.3) легко доказать, подставляя в левую часть этого равенства

$$s_{12} = (p_A - p_3)^2, \quad s_{23} = (p_A - p_1)^2, \quad s_{13} = (p_A - p_2)^2.$$

Далее следует выразить и раскрыть квадраты 4-векторов через массы частиц и скалярные произведения вида  $(p_A p_i)$ , где  $i = 1, 2, 3$  (индекс  $i$  здесь нумерует вторичные частицы). Нетрудно проверить, что любые комбинации скалярных произведений 4-векторов в данной задаче можно выразить через один или два инварианта вида  $s_{ik}$  и массы частиц. Существенные переменные можно выбрать и в неинвариантной форме, например в виде энергий  $E_1^*$  и  $E_2^*$  двух вторичных частиц, которые выражаются через инварианты  $s_{23}$  и  $s_{13}$ . Углы между импульсами вторичных частиц в системе покоя  $A$  также выражаются через инварианты  $s_{ik}$ . Например,

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^*E_2^* - 2p_1^*p_2^*\cos\theta_{12}.$$

Следовательно,

$$\cos\theta_{12}^* = [2E_1^*E_2^* - (s_{12} - m_1^2 - m_2^2)]/2p_1^*p_2^*. \quad (3.4)$$

Здесь

$$p_1^* = |\mathbf{p}_1^*| = [(E_1^*)^2 - m_1^2]^{1/2}, \quad p_2^* = |\mathbf{p}_2^*| = [(E_2^*)^2 - m_2^2]^{1/2},$$

$$E_1^* = (2m_A)^{-1}(m_A^2 + m_1^2 - s_{23}), \quad (3.5)$$

$$E_2^* = (2m_A)^{-1}(m_A^2 + m_2^2 - s_{13}).$$

Переменные  $E_1^*$  и  $\cos\theta_{12}^*$  также могут быть выбраны как существенные независимые.

Часто при изучении трехчастичного состояния используются системы отсчета, связанные с центром инерции пары вторичных частиц. Рассмотрим кинематические переменные в одной из таких систем отсчета, например в Ц-системе частиц 2 и 3. В этой системе осуществляются следующие соотношения:

$$\mathbf{p}_2' + \mathbf{p}_3' = \mathbf{p}_A' - \mathbf{p}_1' = 0, \quad (3.6)$$

$$|\mathbf{p}_2'| = |\mathbf{p}_3'|, \quad |\mathbf{p}_A'| = |\mathbf{p}_1'|. \quad (3.7)$$

Конфигурация импульсов в такой системе отсчета представлена на рис. 3.2. Энергии частиц в этой системе выражаются через инвариант  $s_{23}$ :

$$\begin{aligned} E_2' &= (s_{23} + m_2^2 - m_3^2)/2\sqrt{s_{23}}, & E_3' &= (s_{23} + m_3^2 - m_2^2)/2\sqrt{s_{23}}, \\ E_1' &= (m_A^2 - m_1^2 - s_{23})/2\sqrt{s_{23}}, & E_A' &= (m_A^2 + s_{23} - m_1^2)/2\sqrt{s_{23}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Два последних равенства (3.8) легко выводятся на основе соотношений между инвариантами, которые являются следствиями законов сохранения энергии и импульса:

$$(p_1 + p_2 + p_3)^2 = m_A^2, \quad (p_A - p_2 - p_3)^2 = m_1^2, \quad (p_2 + p_3)^2 = s_{23},$$

4-вектор  $p_2 + p_3 = p_{23}$  имеет в рассматриваемой системе отсчета следующие компоненты:  $p_{23} = (\sqrt{s_{23}}, 0, 0, 0)$ . Отметим, что энергии частиц (3.8) зависят в данном случае только от одного кинематического инварианта и, следовательно, любую из них можно выбрать в качестве одной из независимых существенных кинематических переменных. В качестве второй существенной независимой переменной можно выбрать угол  $\theta_{12}'$  между импульсами  $p_1'$  и  $p_2'$  (рис. 3.2). С помощью соотношения

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1'E_2' - 2p_1'p_2'\cos\theta_{12}',$$

$$(p_1' = |p_1'| = [(E_1')^2 - m_1^2]^{1/2}, \quad p_2' = |p_2'| = [(E_2')^2 - m_2^2]^{1/2})$$

и равенств (3.8), косинус угла  $\theta_{12}'$  выражается через инварианты  $s_{23}$  и  $s_{12}$ :

$$\cos\theta_{12}' = (2p_1'p_2')^{-1}(2E_1'E_2' - s_{12} + m_1^2 + m_2^2); \quad (3.9)$$

$p_1'$  и  $p_2'$  можно также выразить через  $s_{23}$ :

$$\begin{aligned} p_2' &= [s_{23} - (m_2 + m_3)^2]^{1/2}[s_{23} - (m_2 - m_3)^2]^{1/2}/2\sqrt{s_{23}}, \\ p_1' &= [(m_A - m_1)^2 - s_{23}]^{1/2}[(m_A + m_1)^2 - s_{23}]^{1/2}/2\sqrt{s_{23}}, \\ p_2' &= |p_2'| = |p_3'|, \quad p_1' = |p_1'| = |p_A'|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что в переменных  $(E_1', \cos\theta_{12}')$  или  $(E_1', \cos\theta_{12}')$  границы физической области изменения этих переменных, обусловленные законами со-

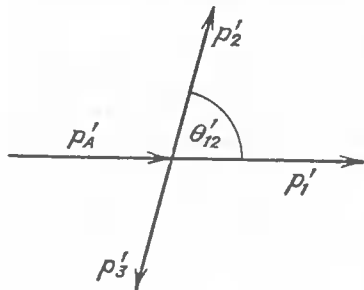


Рис. 3.2. Конфигурация импульсов частиц в трехчастичном распаде в Ц-системе частиц 2 и 3

хранения энергии и импульса, выражаются весьма просто:

$$\begin{aligned} m_1 &\leq E_1' \leq (2m_A)^{-1}[m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2], \\ -1 &\leq \cos\theta_{12}' \leq 1, \\ m_1 &\leq E_1' \leq [m_A^2 - m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]/2(m_2 + m_3), \\ -1 &\leq \cos\theta_{12}' \leq 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отметим, что пределы изменения  $E_1'$  или  $E_1'$  находятся в соответствии с пределами изменения единственного инварианта

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (m_A - m_1)^2,$$

от которого зависят  $E_1'$  и  $E_1'$ .

Если использовать две независимые инвариантные переменные, например  $s_{12}$  и  $s_{23}$ , то границы изменения одной из этих переменных при фиксированной другой определяются из неравенств

$$-1 \leq \cos\theta_{12}' = (2E_1'E_2' - s_{12} + m_1^2 + m_2^2)/2p_1'p_2' \leq 1 \quad (3.12)$$

или

$$-1 \leq \cos\theta_{12}' = (2E_1'E_2' - s_{12} + m_1^2 + m_2^2)/2p_1'p_2' \leq 1. \quad (3.13)$$

В неравенстве (3.12) энергию  $E_2'$  следует выразить через инварианты  $s_{12}$  и  $s_{23}$  с помощью соотношения (3.3).

Из ограничений (3.13) получаются следующие пределы изменения  $s_{12}$  при фиксированном значении инварианта  $s_{23}$ :

$$m_1^2 + m_2^2 + 2E_1'E_2' - 2p_1'p_2' \leq s_{12} \leq m_1^2 + m_2^2 + 2E_1'E_2' + 2p_1'p_2', \quad (3.14)$$

где  $E_1'$ ,  $E_2'$ ,  $p_1'$ ,  $p_2'$  выражаются через  $s_{23}$  согласно формулам (3.8), (3.10). Из ограничений (3.12) также следуют неравенства (3.14). Это можно показать, разрешив неравенства (3.12), записанные в виде

$$|2E_1'E_2' - s_{12} + m_1^2 + m_2^2| \leq 2p_1'p_2',$$

относительно  $s_{12}$  с учетом зависимости от этого инварианта величин  $E_2'$  и  $p_2' = [(E_2')^2 - m_2^2]^{1/2}$  (см. (3.3), (3.5)).

### 3.2. Распределения по энергиям, углам вылета, эффективным массам продуктов трехчастичного распада в системе покоя нестабильной частицы

Модель релятивистского фазового объема. В рамках статистической гипотезы дифференциальные распределения вторичных частиц в распаде (3.1) определяются элементом релятивистского фазового объема (см. (1.33) при  $|M|^2 = \text{const}$ , а также (1.45))

$$dw \sim \frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p_2}{E_2} \frac{d^3p_3}{E_3} \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3). \quad (3.15)$$



Нормируем распределение (3.15) на единичную вероятность. Трехчастичный фазовый объем уже вычислялся ранее в связи с проблемой нерезонансного фона в спектре эффективных масс — масс пары вторичных частиц (см. (1.52)). Результат сводится к однократному интегралу (1.52) по переменной  $s_{12}$ , причем для интересующего нас случая вместо инварианта  $s$  следует подставить в (1.52) квадрат массы нестабильной частицы:  $s \rightarrow m_A^2$ . Результат (1.52) для распределения  $dw/ds_{12}$  по квадрату эффективной массы  $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$  с учетом указанной выше замены ( $s \rightarrow m_A^2$ ), верен в рамках статистической гипотезы и в случае распада (3.1). Поэтому не будем его вновь воспроизводить. Нормировочный интеграл выпишем здесь в наиболее краткой форме:

$$w \sim 16 \pi^2 \int dE_1^* p_1^* p_2^* / \sqrt{s_{23}}, \quad (3.16)$$

где  $p_2' = [(E_2')^2 - m_2^2]^{1/2}$ ,  $E_2' = (s_{23} + m_2^2 - m_3^2)/2 \sqrt{s_{23}}$  — модуль импульса и энергия частицы 2 в Ц-системе частиц 2 и 3 (см. (3.8), (3.10));  $E_1^*$ ,  $p_1^*$  — энергия и модуль импульса частицы 1 в системе покоя нестабильной частицы  $A$ ; инвариант  $s_{23}$  можно выразить через энергию  $E_1^*$  и массы частиц:

$$s_{23} = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2 E_1^* m_A.$$

Пределы интегрирования по переменной  $E_1^*$  в (3.16) указаны в формулах (3.11).

Распределение по энергии. По сути дела, формула (3.16) представляет распределение событий по энергии  $E_1^*$ :

$$dw/dE_1^* = I^{-1} [(E_1^*)^2 - m_1^2]^{1/2} p_2'(E_1^*) / \sqrt{s_{23}(E_1^*)}. \quad (3.17)$$

Здесь через  $I$  обозначен нормировочный интеграл

$$I = \int_{m_1}^{(E_1^*)_{\max}} dE_1^* p_1^* p_2' / \sqrt{s_{23}}, \quad (3.18)$$

где  $(E_1^*)_{\max} = (2m_A)^{-1} [m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]$ .

Удобной формой представления отношения  $p_2' / \sqrt{s_{23}}$  как функции  $s_{23}$  или  $E_1^*$  является следующее выражение:

$$\frac{p_2'}{\sqrt{s_{23}}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(m_2 + m_3)^2}{m_A^2 + m_1^2 - 2 E_1^* m_A} \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_A^2 + m_1^2 - 2 E_1^* m_A} \right]^{1/2}.$$

Распределение по углу вылета. В разделе 1.6 при вычислении трехчастичного фазового объема в качестве одного из промежуточных результатов фигурировало импульсно-угловое распределение одной из распадных частиц по статистической гипотезе:

$$dw = (4 \pi I)^{-1} \frac{p_2'}{\sqrt{s_{23}}} \frac{d^3 p_1}{E_1}. \quad (3.19)$$

Это выражение обладает явной релятивистской инвариантностью. Из него находятся одночастичные импульсно-угловые распределения в произвольной системе отсчета. В частности, в системе покоя частицы  $A$  в рамках статистической гипотезы предсказывается изотропное угловое распределение любой из вторичных частиц:

$$\frac{dw}{d\Omega^*} = (4 \pi I)^{-1} \int_{m_1}^{(E_1^*)_{\max}} dE_1^* \frac{p_1^* p_2'(E_1^*)}{\sqrt{s_{23}(E_1^*)}} = \frac{1}{4 \pi}.$$

Дважды дифференциальные распределения. На основе (3.15) можно найти и дважды дифференциальные распределения по кинематическим характеристикам двух вторичных частиц в системе покоя частицы  $A$ . Если проводить интегрирования в (3.15) по компонентам 3-импульса частицы 3 в этой системе, то получим следующее выражение:

$$dw = (16 \pi^2 I)^{-1} p_1^* dE_1^* d\Omega_1^* p_2^* dE_2^* (d\Omega_2^* / E_3^*) \delta(m_A - E_1^* - E_2^* - E_3^*), \quad (3.20)$$

где  $E_3^*$  — энергия частицы 3 выражается с помощью закона сохранения импульса ( $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0$ ) через импульсные и угловые переменные частиц 1 и 2:

$$E_3^* = [(p_3^*)^2 + m_3^2]^{1/2} = [(p_1^*)^2 + (p_2^*)^2 + 2 |p_1^*| |p_2^*| \cos \theta_{12}^* + m_3^2]^{1/2}.$$

Здесь  $\theta_{12}^*$  — угол между векторами  $p_1^*$  и  $p_2^*$  в системе покоя  $A$ . Элемент телесного угла вылета частицы 2 можно представить в виде  $d\Omega_2^* = d \cos \theta_{12}^* d\varphi_2^*$  ( $\varphi_2^*$  — азимутальный угол вылета частицы 2;  $0 \leq \varphi_2^* \leq 2\pi$ ). С помощью  $\delta$ -функции в правой части формулы (3.20) можно выполнить интегрирование по углу  $\theta_{12}^*$ :

$$\int d \cos \theta_{12}^* \delta(m_A - E_1^* - E_2^* - E_3^*) = |dE_3^* / d \cos \theta_{12}^*|^{-1} = E_3^* / (p_1^* p_2^*).$$

Производная  $dE_3^* / d \cos \theta_{12}^*$  вычисляется при значении  $\cos \theta_{12}^*$ , обращающем в нуль аргумент  $\delta$ -функции:

$$\cos \theta_{12}^* = (p_1^* p_2^*)^{-1} [E_1^* E_2^* - m_A(E_1^* + E_2^*) + (m_A^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)/2]. \quad (3.21)$$

Нетрудно показать, что результат (3.21) совпадает с выражением (3.4), если в последнее подставить инвариант  $s_{12}$ , раскрытый в виде

$$s_{12} = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2 m_A E_3^* = m_3^2 - m_A^2 + 2 m_A (E_1^* + E_2^*).$$

Очевидное ограничение

$$|\cos \theta_{12}^*| \leq 1 \quad (3.22)$$

определяет допустимые границы изменения энергии  $E_1^*$  и  $E_2^*$ . Проводя в (3.20) интегрирования по  $d\Omega_1^*$  и  $d\varphi_2^*$  в геометрических пределах, находим дважды дифференциальное распределение событий по энергиям частиц 1 и 2:

$$d^2 w / dE_1^* dE_2^* = 1/2I. \quad (3.23)$$

Распределение событий (3.23) по энергиям двух вторичных частиц в систе-

ме покоя  $A$  оказывается равномерным в области значений переменных  $E_1^*, E_2^*$ , ограниченной неравенством (3.22). Границы этой области определяются следующими неравенствами, вытекающими из неравенства (3.22):

$$\frac{(m_A - E_1^*)E_2' - p_1^* p_2'}{\sqrt{s_{23}}} \leq E_2^* \leq \frac{(m_A - E_1^*)E_2' + p_1^* p_2'}{\sqrt{s_{23}}}, \quad (3.24)$$

где  $E_2', p_2'$  — энергия и импульс частицы 2 в Ц-системе частиц 2 и 3. Они выражаются через  $s_{23}$  согласно формулам (3.8) и (3.10), а инвариант  $s_{23} = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1^*$ . Нетрудно видеть, что интегрирование распределения (3.23) по  $E_2^*$  в пределах (3.24) приводит к формуле (3.17). Таким образом, статистическая гипотеза предсказывает равномерную заселенность событиями площади на плоскости  $(E_2^*, E_1^*)$ , ограниченной неравенствами (3.24). При минимальном возможном значении энергии частицы 1,  $(E_1^*)_{\min} = m_1$ , обращается в нуль импульс  $p_1^*$ .

Согласно (3.24) верхний и нижний пределы изменения  $E_2^*$  в этом случае совпадают друг с другом. Значение  $E_1^*$  достигает максимального значения

$$(E_1^*)_{\max} = [m_A^2 + m_1^2 - (m_1 + m_3)^2]/2m_A,$$

когда инвариант  $s_{23}$  принимает минимальное значение  $(s_{23})_{\min} = (m_2 + m_3)^2$ . При таком значении  $s_{23}$  энергия  $E_2' = m_2$  и  $p_2' = 0$ . В этих условиях верхний и нижний пределы изменения  $E_2^*$  также совпадают друг с другом. Отсюда заключаем, что неравенства (3.24) ограничивают на плоскости  $(E_2^*, E_1^*)$  замкнутую область, причем допустимые значения  $E_2^*, E_1^*$  находятся внутри и на границе этой области.

Линейная связь между переменными энергии вторичных частиц в системе покоя частицы  $A$  и инвариантными переменными  $s_{12}, s_{23}, s_{13}$  позволяет на основе (3.23) легко находить распределения по любой паре этих переменных. Например,

$$d^2w/ds_{23} ds_{12} = 1/8 Im_A^2. \quad (3.25)$$

Допустимая область изменения переменных  $s_{12}, s_{23}$  определяется неравенствами (3.14). Ее можно также установить на основе неравенств (3.24), учитывая, что  $E_1^*$  выражается только через инвариант  $s_{23}$ :

$$E_1^* = (m_A^2 + m_1^2 - s_{23})/2m_A,$$

а  $E_2^*$  через  $s_{12}$  и  $s_{23}$ :

$$E_2^* = (m_A^2 + m_2^2 - s_{13})/2m_A = (s_{23} + s_{12} - m_1^2 - m_3^2)/2m_A.$$

Здесь использована связь  $s_{13}$  с другими инвариантами (3.3). Неравенства (3.14) также ограничивают на плоскости  $(s_{12}, s_{23})$  некоторую область допустимых значений, которая должна равномерно заполняться событиями трехчастичного распада (см. (3.25)), если справедлива статистическая гипотеза.

Области интегрирования по переменным  $(E_1^*, E_2^*)$ ,  $(s_{12}, s_{23})$ , а также по переменным  $(T_1^*, T_2^*)$ , где  $T_{1,2}^* = E_{1,2}^* - m_{1,2}$  — кинетические энергии частиц 1, 2 называют фигурами Далица. На фигуры Далица часто точками наносят наблюдаемые экспериментально случаи трехчастичных распадов. Такой способ представления данных опыта получил название диаграмм Далица. Ниже приводится довольно краткое обсуждение возможностей

анализа динамики трехчастичных распадов с помощью метода Далица. Детальное обсуждение этого метода содержится, например, в книгах [6, 7]. Мы ограничимся изложением лишь принципиальных основ.

Влияние инвариантной амплитуды. Обсудим теперь вопрос о влиянии зависимости квадрата модуля  $|M|^2$  инвариантной амплитуды процесса трехчастичного распада от инвариантных переменных  $s_{12}, s_{23}$  (или от любой пары переменных, связанных соотношением (3.3)). Если  $|M|^2$  зависит только от одной инвариантной переменной, например  $s_{23}$ , то истинные распределения  $dw/ds_{23}, dw/dE_1^*$  будут отличаться от предсказываемых на основе статистической гипотезы. Нарушится также равномерность распределения событий в плоскостях переменных  $(E_1^*, E_2^*)$  и  $(s_{12}, s_{23})$ . Это отличие легко учесть, дополнив соответствующие формулы множителем  $|M|^2 = f(s_{23})$  и принимая во внимание связь  $s_{23}$  и  $E_1^*$ . Наблюдение на опыте несоответствия с предсказаниями статистической модели является указанием на зависимость процесса распада от динамики взаимодействия. Выявить зависимость  $|M|^2$  от инвариантных переменных и сравнить ее с предсказаниями динамических моделей — основная цель соответствующих физических экспериментов. Зависимость  $|M|^2$  от двух инвариантов также выявляется на основе сравнения данных опыта с предсказаниями статистической модели. Такая зависимость также нарушает равномерность распределения событий по двум переменным  $(E_1^*, E_2^*)$  или  $(s_{12}, s_{23})$ . Ее можно отличить от случая, когда  $|M|^2$  зависит только от одной существенной переменной, если поочередно фиксировать значения одной из двух переменных и изучать характер распределения по другой.

Таким образом, и в данной области кинематика оказывается полезной не только для установления дозволённых областей изменения кинематических переменных, что само по себе весьма важно, но и позволяет выявить динамику процесса.

Присутствие в трехчастичных распадах корреляций между спинами и импульсами частиц осложняет характер наблюдаемых распределений вторичных частиц. В системе покоя частицы, если она обладает спином и оказывается поляризованной, усложняются угловые распределения вторичных частиц. Эти эффекты также можно выявить экспериментально, поскольку в случае неполяризованных первичных частиц угловое распределение вторичных в системе покоя частицы  $A$  изотропно.

Распределение по энергии и углу разлета. В трехчастичных распадах остановившихся нестабильных частиц не всегда удается измерить характеристики всех вторичных частиц. В тех случаях, когда измеряются энергия одной из частиц  $(E_1^*)$  и угол разлета  $\theta_{12}^*$  между этой частицей и другой вторичной частицей, можно провести анализ распределения  $d^2w/dE_1^* d \cos \theta_{12}^*$ . Это распределение — следствие распределения  $d^2w/dE_1^* dE_2^*$  (см. (3.23)) после замены переменной  $E_2^* \rightarrow \cos \theta_{12}^*$ .

Решая соотношения (3.21) относительно  $E_2^*$ , находим

$$(E_2^*)_{(1,2)} = \frac{E_2' \sqrt{s_{23}} \pm v_{23} \cos \theta_{12}^* [s_{23}(p_2')^2 - m_2^2(p_1^*)^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}{(m_A - E_1^*) [1 - v_{23}^2 \cos^2 \theta_{12}^*]}. \quad (3.26)$$

Здесь  $E_2', p_2'$  — энергия и модуль импульса частицы 2 в Ц-системе частиц 2

и 3 (см. (3.8) (3.10)),  $v_{23}$  — модуль скорости релятивистского преобразования из системы покоя частицы  $A$  в  $\Pi$ -систему частиц 2 и 3 (или наоборот):

$$v_{23} = p_1^* / (m_A - E_1^*). \quad (3.27)$$

Инвариант  $s_{23}$  выражается через  $E_1^*$ .

Формула (3.26) аналогична формуле (2.55). Если скорость  $v_2'$  частицы 2 в  $\Pi$ -системе частиц 2 и 3 превышает по модулю скорость  $v_{23}$ , то  $s_{23}(p_2')^2 > m_2^2(p_1^*)^2$  и подкоренное выражение в (3.26) положительно определено при любых значениях угла  $\theta_{12}^*$ , заключенного в интервале значений  $0 \leq \theta_{12}^* \leq \pi$ . В этом случае связь между  $E_2^*$  и  $\cos \theta_{12}^*$  однозначна:

$$E_2^* = \frac{E_2' \sqrt{s_{23}} + v_{23} \cos \theta_{12}^* [s_{23}(p_2')^2 - m_2^2(p_1^*)^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}{(m_A - E_1^*) [1 - v_{23}^2 \cos^2 \theta_{12}^*]}. \quad (3.28)$$

При этом неравенство  $v_2' > v_{23}$  можно разрешить относительно энергии:

$$E_1^* \leq [(m_A - m_2)^2 + m_1^2 - m_3^2] [2(m_A - m_2)]^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что правая часть этого неравенства превышает минимальное значение энергии частицы 1  $(E_1^*)_{\min} = m_1$  и не превышает максимальное значение

$$(E_1^*)_{\max} = [m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2] / 2m_A.$$

Поэтому связь (3.28) имеет место в интервале энергий частицы 1:

$$m_1 \leq E_1^* \leq [(m_A - m_2)^2 + m_1^2 - m_3^2] [2(m_A - m_2)]^{-1}. \quad (3.29)$$

Угол  $\theta_{12}^*$  изменяется в пределах

$$0 \leq \theta_{12}^* \leq \pi. \quad (3.30)$$

В случае  $v_{23} > v_2'$  имеет место неравенство  $m^2(p_1^*)^2 > s_{23}(p_2')^2$ . В таких условиях связь между  $E_2^*$  и  $\cos \theta_{12}^*$  оказывается двузначной (см. (3.26)), а угол разлета ограничен условием

$$\sin \theta_{12}^* \leq \sqrt{s_{23} p_2' / m_2 p_1^*}. \quad (3.31)$$

Неравенство  $v_{23} > v_2'$  можно разрешить относительно энергии  $E_1^*$  и установить, что двузначная связь (3.26) осуществляется в интервале

$$[(m_A - m_2)^2 + m_1^2 - m_3^2] [2(m_A - m_2)]^{-1} \leq E_1^* \leq [m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2] / 2m_A. \quad (3.32)$$

В этом случае

$$0 \leq \theta_{12}^* \leq \arcsin (\sqrt{s_{23} p_2' / m_2 p_1^*}). \quad (3.33)$$

Якобиан преобразования  $E_2^* \rightarrow \cos \theta_{12}^*$  вычисляется дифференцированием (3.26) по  $\cos \theta_{12}^*$  и по модулю равен

$$\left| \frac{d(E_2^*)^{(1,2)}}{d \cos \theta_{12}^*} \right| = \frac{p_1^* [(p_2^*)^{(1,2)}]^2}{[(p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}, \quad (3.34)$$

где  $(p_2^*)^{(1,2)}$  — импульс частицы 2 в системе покоя  $A$ , выраженный через  $E_1^*$  и  $\cos \theta_{12}^*$  и соответствующий возможным значениям энергии  $(E_2^*)^{(1,2)}$

в случаях (3.26) или (3.28):

$$(p_2^*)^{(1,2)} = \frac{\sqrt{s_{23}} E_2' v_{23} \cos \theta_{12}^* \pm [(p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}{(m_A - E_1^*)(1 - v_{23}^2 \cos^2 \theta_{12}^*)} \quad (3.35)$$

При выполнении условий (3.29), (3.30) дважды дифференциальное распределение событий по  $E_1^*$  и  $\cos \theta_{12}^*$  имеет вид (см. (3.23) и (3.34))

$$\frac{d^2 w}{dE_1^* d \cos \theta_{12}^*} = \frac{p_1^* [(p_2^*)^{(1)}]^2}{2I [(p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}. \quad (3.36)$$

При выполнении условий (3.32), (3.33) соответствующее распределение записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dE_1^* d \cos \theta_{12}^*} &= \\ &= \frac{p_1^* [s_{23}(E_2')^2 v_{23}^2 \cos^2 \theta_{12}^* + (p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]}{I(m_A - E_1^*)^2 (1 - v_{23}^2 \cos^2 \theta_{12}^*)^2 [(p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Распределение (3.37) имеет в знаменателе корневую особенность, которая приводит к концентрации событий вблизи максимального возможного угла разлета (3.33) и полному отсутствию событий в области углов  $\theta_{12}^* > (\theta_{12}^*)_{\max}$ . Распределение (3.36) такими свойствами не обладает. Указанные особенности распределений (3.36), (3.37) по углу разлета  $\theta_{12}^*$  при фиксированных значениях энергии  $E_1^*$  могут оказаться полезными при поисках и идентификации трехчастичных распадов в условиях, когда кинематические переменные вторичных частиц измеряются не полностью, а также когда сорт частицы  $A$  заранее не известен.

Если квадрат модуля инвариантной амплитуды трехчастичного распада  $|M|^2$  не является постоянной величиной, а зависит от двух инвариантов:  $|M|^2 = f(s_{23}, s_{12})$ , то, выражая инварианты через  $E_1^*$  и  $E_2^*$ , можно получить более общую формулу для распределения событий по переменным  $E_1^*$  и  $\cos \theta_{12}^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dE_1^* d \cos \theta_{12}^*} &\sim \\ &\sim \frac{p_1^* \{ [(p_2^*)^{(1)}]^2 \Phi(E_1^*, (E_2^*)^{(1)}) + [(p_2^*)^{(2)}]^2 \Phi(E_1^*, (E_2^*)^{(2)}) \}}{[(p_2')^2 s_{23} - (p_1^*)^2 m^2 \sin^2 \theta_{12}^*]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\Phi(E_1^*, E_2^*) = f(s_{23}, s_{12}).$$

Формула (3.38) справедлива, если переменные  $E_1^*$  и  $\theta_{12}^*$  удовлетворяют неравенствам (3.32), (3.33). Если же эти переменные изменяются в пределах (3.29), (3.30), то второе слагаемое в фигурных скобках в числителе (3.38) следует опустить.

### 3.3. Трехчастичные распады на лету

Согласно формуле (3.19) распределение одной из вторичных частиц в процессе трехчастичного распада по компонентам ее импульса представляется в релятивистски инвариантной форме:

$$dw = (4\pi I)^{-1} (p_2' / \sqrt{s_{23}}) E_1^{-1} d^3 p_1,$$

где релятивистский элемент одночастичного фазового объема  $d^3 p_1 / E_1$  может быть записан в любой инерциальной системе отсчета. Поэтому выписанная выше формула справедлива в рамках статистической гипотезы и для распадов на лету. При этом необходимо, чтобы первичная частица  $A$  обладала фиксированной скоростью  $v_A$  (или импульсом). Если имеется спектр скоростей (импульсов) первичных нестабильных частиц, то каждый случай распада необходимо с помощью релятивистского преобразования компонент импульсов вторичных частиц привести в некоторую определенную систему отсчета, в которой скорость  $v_A$  или импульс  $p_A$  заранее фиксированы. Если углы вылета вторичных частиц условиться измерять относительно направления скорости  $v_A$ , то все системы отсчета, где нестабильная частица  $A$  имеет один и тот же модуль скорости  $|v_A|$ , будут равноценными. Так или иначе, при исследовании распадов на лету следует отбирать события, в которых первичные частицы  $A$  находятся в одинаковых кинематических состояниях.

Естественными независимыми кинематическими переменными, характеризующими вторичную частицу 1 при распадах на лету, являются ее энергия (модуль импульса)  $E_1(p_1)$  и угол вылета  $\theta_1$ . Вследствие цилиндрической симметрии распада на лету относительно направления вектора  $v_A$ , распределение событий равномерно во всем геометрическом интервале изменения  $\varphi_1$ :  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ . В распределении (3.19)  $p_2'$  выражается через инвариант  $s_{23}$ , который представляется через  $E_1$  и  $\theta_1$  следующим образом:

$$s_{23} = m_A^2 + m_1^2 - 2E_A E_1 + 2p_A p_1 \cos \theta_1. \quad (3.39)$$

Поэтому распределение (3.19) имеет форму

$$\frac{d^2 w}{dE_1 d \cos \theta_1} = (4I)^{-1} p_1 \left\{ \left[ 1 - \frac{(m_2 + m_3)^2}{s_{23}} \right] \left[ 1 - \frac{(m_2 - m_3)^2}{s_{23}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.40)$$

Чтобы получить из (3.40) распределения по одной из кинематических переменных (либо  $E_1$ , либо  $\theta_1$ ), необходимо установить пределы изменения этих переменных в зависимости друг от друга. Как уже отмечалось, пределы изменения инварианта (3.39)  $(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (m_A - m_1)^2$ . Если пределы изменения инварианта (3.39), то указанные неравенства ограничивают область изменения переменных  $E_1$  и  $\cos \theta_1$ . Установим пределы изменения угла вылета  $\theta_1$  при фиксированном значении энергии  $E_1$ . Не трудно видеть, что ограничение на величину  $s_{23}$  сверху не приводит к ограничениям на угол вылета, так как неравенство  $E_A E_1 - m_A m_1 \geq p_A p_1 \cos \theta_1$  всегда выполняется. Ограничение на  $s_{23}$  снизу выражается в форме неравенства

$$2p_A p_1 \cos \theta_1 \geq 2E_A E_1 - m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2,$$

которое можно представить в виде

$$p_A p_1 \cos \theta_1 \geq E_A E_1 - m_A E_{1M}^*, \quad (3.41)$$

где  $E_{1M}^* = [m_A^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2] / 2m_A$  — максимальная возможная энергия частицы 1 в системе покоя нестабильной частицы. Неравенство (3.41) приводит к следующим ограничениям на угол вылета частицы 1:

$$-1 \leq (E_A E_1 - m_A E_{1M}^*) / p_A p_1 \leq \cos \theta_1 \leq 1, \quad (3.42)$$

если удовлетворяются неравенства

$$-p_A p_1 \leq E_A E_1 - m_A E_{1M}^* \leq p_A p_1. \quad (3.43)$$

Если же выполнено неравенство

$$E_A E_1 - m_A E_{1M}^* \leq -p_A p_1, \quad (3.44)$$

то пределы изменения  $\cos \theta_1$  равны геометрическим:

$$-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1.$$

Разрешим неравенства (3.43) относительно  $E_1$ :

$$(E_A E_{1M}^* - p_A p_{1M}^*) / m_A \leq E_1 \leq (E_A E_{1M}^* + p_A p_{1M}^*) / m_A, \quad (3.45)$$

где  $p_{1M}^*$  — максимальный возможный модуль импульса частицы 1 в системе покоя частицы  $A$ ;  $p_{1M}^* = [(E_{1M}^*)^2 - m_1^2]^{1/2}$ . Таким образом, установлено, что при изменении энергии частицы 1 в интервале (3.45) угол ее вылета изменяется в пределах, обусловленных неравенствами (3.42):

$$(E_A E_1 - m_A E_{1M}^*) / p_1 p_A \leq \cos \theta_1 \leq 1. \quad (3.46)$$

Интегрируя распределение (3.40) по  $\cos \theta_1$  в пределах (3.46), можно найти энергетический спектр частиц сорта 1  $dw/dE_1$  в интервале значений  $E_1$ , подчиняющихся неравенствам (3.45).

Неравенство (3.44) удобно разрешать относительно модуля импульса  $p_1$ :

$$-(p_A E_{1M}^* + E_A p_{1M}^*) / m_A \leq p_1 \leq (E_A p_{1M}^* - p_A E_{1M}^*) / m_A.$$

Левое неравенство не имеет физического смысла, поскольку должно осуществляться условие  $|p_1| = p_1 \geq 0$ . Правое неравенство имеет физический смысл, если  $E_A p_{1M}^* \geq p_A E_{1M}^*$ , что эквивалентно неравенству  $v_{1M}^* \geq v_A$ , где  $v_{1M}^*$  — максимальная скорость частицы 1 в системе покоя частицы  $A$ . Следовательно, если скорость  $v_{1M}^*$  превышает скорость нестабильной частицы  $A$ , то появляется дополнительная по сравнению с (3.45) разрешенная область изменения энергии-импульса вторичной частицы:

$$0 \leq p_1 \leq (E_A p_{1M}^* - p_A E_{1M}^*) / m_A. \quad (3.47)$$

В этой области энергии пределы изменения угла вылета

$$-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1. \quad (3.48)$$

При  $v_A \geq v_{1M}^*$  часть энергетического спектра (3.47) отсутствует, а при  $v_A \leq v_{1M}^*$  ее следует присоединить к интервалу энергий (3.45).

Из-за громоздкости соответствующих вычислений здесь не приводятся формулы для распределений  $dw/dE_1$ , получающиеся в рамках статистической гипотезы. Ограничения на области изменения кинематических переменных в Л-системе, полученные выше, имеют самостоятельное значение при анализе допустимых импульсно-угловых характеристик продуктов распада нестабильных частиц.

Рассмотрим теперь ту же задачу о границах изменения кинематических переменных  $E_1$  и  $\theta_1$  в другой постановке. А именно: установим, какие значения может принимать импульс (энергия) вторичной частицы сорта 1, если она наблюдается под углом  $\theta_1$  к направлению скорости нестабильной частицы  $A$ . Для этого неравенство (3.41) следует разрешить относительно модуля импульса частицы 1:

$$\frac{m_A p_A E_{1M}^* \cos \theta_1 - E_A [m_A^2 (p_{1M}^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1} \leq p_1 \leq \frac{m_A p_A E_{1M}^* \cos \theta_1 + E_A [m_A^2 (p_{1M}^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1}. \quad (3.49)$$

Из анализа неравенства (3.49) следует, что при выполнении условия  $m_A p_{1M}^* > m_1 p_A$  (эквивалентного неравенству  $v_{1M}^* > v_A$ ), левое из ограничений (3.49) оказывается физически бессмысленным, поскольку модуль импульса  $p_1$  положительно определен. Поэтому пределы изменения  $p_1$  в указанном случае определяются неравенствами

$$0 \leq p_1 \leq \frac{m_A p_A E_{1M}^* \cos \theta_1 + E_A [m_A^2 (p_{1M}^*)^2 - m_1^2 p_A^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}}{E_A^2 - p_A^2 \cos^2 \theta_1}. \quad (3.50)$$

Угол  $\theta_1$  может изменяться при этом в геометрических пределах, поэтому  $-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1$ .

Если же скорость  $v_A$  частицы  $A$  превышает максимальную скорость частицы 1 в системе покоя  $A$  ( $v_A > v_{1M}^*$ ), то из требования положительности подкоренного выражения в формулах (3.49) вытекает, что существует предельный угол вылета частиц сорта 1 в Л-системе:

$$(\theta_1)_{\max} = \arcsin(m_A p_{1M}^* / m_1 p_A). \quad (3.52)$$

Физический смысл имеют оба неравенства (3.49), а угол вылета  $\theta_1$  изменяется в пределах

$$0 \leq \theta_1 \leq (\theta_1)_{\max}. \quad (3.53)$$

Вылету частицы 1 под предельным углом отвечает значение ее импульса (энергии), равное

$$p_1 = m_1 [m_1^2 p_A^2 - m_A^2 (p_{1M}^*)^2]^{1/2} / m_A E_{1M}^*, \quad (3.54)$$

$$E_1 = m_1^2 E_A / m_A E_{1M}^*.$$

Отметим, что все кинематические формулы (3.41)–(3.54) справедливы и в случаях, когда число  $n$  вторичных частиц в распаде больше трех. В этих случаях значение максимальной энергии частицы 1 в системе покоя части-

цы  $A$  следует вычислять по формуле

$$E_{1M}^* = [m_A^2 + m_1^2 - (\sum_{i=2}^n m_i)^2] / 2m_A,$$

где сумма берется по всем вторичным частицам, кроме частицы сорта 1.

Соотношения (3.49)–(3.54) решают задачу о допустимых интервалах изменения модуля импульса (энергии) вторичной частицы, вылетающей под фиксированным углом  $\theta_1$  при распаде на лету на три или более частиц.

Полезный метод анализа пределов изменения  $E_1$  и  $\theta_1$  при фиксированном значении инварианта  $s_{23}$  приводится в книге [6]. Этот метод основан на анализе эллипсов импульсов для эквивалентного двухчастичного распада, когда система всех вторичных частиц, кроме частицы 1, принимается за одну частицу с переменной эффективной массой  $\sqrt{s_{23}}$ . Получаемые при этом результаты, совпадают с найденными здесь аналитическим методом.

### 3.4. Распределение по поперечному импульсу

Анализ распределения событий трехчастичного распада по поперечному импульсу был предложен сравнительно недавно [12, 19]. Он может оказаться очень удобным и эффективным в тех случаях, когда среди продуктов трехчастичного распада две частицы не регистрируются. Примерами таких случаев являются распад тяжелого лептона

$$\tau^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau),$$

где  $l^\pm = \mu^\pm, e^\pm$ , распад тяжелого очарованного мезона

$$D^\pm \rightarrow K^0(\bar{K}^0) + l^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$$

с нерегистрируемыми нейтрино и  $K^0(\bar{K}^0)$ -мезонами и т.д. Из-за очень малого времени жизни часто не удается зарегистрировать направление движения нестабильной первичной частицы. Однако если из теоретического анализа динамики процесса образования такой нестабильной частицы можно указать преимущественное направление ее вылета, то метод анализа событий по поперечному импульсу одной из вторичных частиц полезен для идентификации искоемых событий и оценки массы нестабильной частицы [12, 19].

Поскольку речь идет о поперечном импульсе, измеряемом относительно направления движения первичной нестабильной частицы  $A$ , то рассмотрение проблемы можно провести в системе покоя этой частицы. Релятивистские преобразования вдоль направления скорости  $v_A$  не могут изменить распределения по переменной поперечного импульса:

$$k_1 = p_1 \sin \theta_1 = p_1^* \sin \theta_1^*. \quad (3.55)$$

Распределение по этой переменной получим на основе общей формулы для распределения по кинематическим переменным в распаде (3.1) в соответствии со статистической гипотезой

$$dw = (8\pi I)^{-1} \frac{d^3 p_1}{E_1} \left[ 1 - \frac{(m_2 + m_3)^2}{s_{23}} \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{(m_2 - m_3)^2}{s_{23}} \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим для простоты случай, когда массами вторичных частиц по

сравнению с массой нестабильной частицы  $A$  можно пренебречь:  $m_1, m_2, m_3 \ll m_A$ .

В приведенных выше примерах распадов осуществляется такая ситуация. Указанное приближение не принципиально, но поможет прояснить суть дела, не прибегая к анализу чрезмерно сложных формул. Распределение событий в этом случае определяется в рамках статистической гипотезы только релятивистски инвариантным элементом фазового объема частицы 1:

$$dw = (8\pi I)^{-1} (d^3 p_1 / E_1).$$

Нормировочный интеграл  $I$  в том же приближении оказывается равным

$$I = \frac{1}{2} \frac{m_A^{1/2}}{\int_0^{m_A^{1/2}} E_1^* dE_1^*} = \frac{m_A^{1/2}}{16}.$$

Поэтому нормированное на единицу распределение по  $E_1^*$  и  $\cos \theta_1^*$  имеет простой вид ( $E_1^* = p_1^*$ ):

$$dw/dE_1^* d\cos \theta_1^* = 4E_1^*/m_A^2, \quad (3.56)$$

переменные изменяются в пределах

$$0 \leq E_1^* \leq m_A/2, \quad -1 \leq \cos \theta_1^* \leq 1. \quad (3.57)$$

Переходя от переменной  $\cos \theta_1^*$  к переменной  $k_\perp$  с помощью формулы (3.55) и учитывая, что

$$d\cos \theta_1^* = 2k_\perp dk_\perp / E_1^* [(E_1^*)^2 - k_\perp^2]^{1/2}, \quad (3.58)$$

находим

$$d^2 w / dE_1^* dk_\perp = 8k_\perp / m_A^2 [(E_1^*)^2 - k_\perp^2]^{1/2}. \quad (3.59)$$

При выводе (3.58) учтена двузначная связь между  $\cos \theta_1^*$  и  $k_\perp$  (см. (3.55)):

$$\cos \theta_1^* = \pm [1 - (k_\perp / E_1^*)^2]^{1/2}.$$

Пределы изменения энергии  $E_1^*$  при фиксированном значении переменной поперечного импульса  $k_\perp$  равны

$$k_\perp \leq E_1^* \leq m_A/2. \quad (3.60)$$

Интегрируя распределение (3.59) по  $E_1^*$  в пределах (3.60), находим распределение по модулю поперечного импульса:

$$dw/dk_\perp = 8k_\perp \ln [k_\perp^{-1} \{ (m_A/2) + [(m_A^2/4) - k_\perp^2]^{1/2} \}] / m_A^2. \quad (3.61)$$

Распределение (3.61) обращается в нуль на границах кинематически разрешенной области изменения поперечного импульса

$$0 \leq k_\perp \leq m_A/2. \quad (3.62)$$

Максимум функции распределения (3.61) находится внутри интервала (3.62). Приближенный анализ функции (3.61) на экстремум показывает, что положение максимума с хорошей точностью оказывается практически в центре интервала (3.62):

$$k_\perp \approx m_A/4.$$

Учет масс вторичных частиц ( $m_1, m_2, m_3 \neq 0$ ) очень усложняет анализ, однако конкретные численные расчеты и в этом случае приводят к положению максимума распределения событий по  $k_\perp$  почти посередине допустимого интервала изменения этой переменной:

$$k_\perp \approx (p_1^*)_{\max} / 2,$$

где

$$(p_1^*)_{\max} = (2m_A)^{-1} \{ [(m_A - m_1)^2 - (m_2 + m_3)^2] \times \\ \times [(m_A - m_1)^2 - (m_2 - m_3)^2] \}^{1/2}. \quad (3.63)$$

Рассмотрим еще два примера трехчастичных распадов с учетом динамики, показывающих, что результат (3.63) относительно положения максимума распределения по  $k_\perp$  оказывается слабочувствительным к форме энергетического распределения событий в системе покоя частицы  $A$ . Импульсно-угловое распределение вторичных заряженных лептонов в распаде тяжелого лептона

$$\tau^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l) + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau)$$

в теории слабого взаимодействия имеет вид (в системе покоя  $\tau^\pm$ ) [11]

$$\frac{dw}{dE_1^* d\Omega_1^*} = \frac{4}{\pi m_\tau^4} (3m_\tau - 4E_1^*) (E_1^*)^2, \quad (3.64)$$

где  $m_\tau$  — масса  $\tau$ -лептона,  $E_1^*$  — энергия вторичного лептона  $l^\pm$ , массой которого пренебрегается.

Совершая замену переменной (3.58) и проводя интегрирование (3.64) по  $\varphi_1^*$  в пределах от 0 до  $2\pi$  и по  $E_1^*$  в пределах (3.60) с заменой  $m_A$  на  $m_\tau$ , находим распределение событий по  $k_\perp$ :

$$\frac{dw}{dk_\perp} = \frac{16k_\perp}{m_\tau^4} \int_{k_\perp}^{m_\tau/2} E_1^* (3m_\tau - 4E_1^*) [(E_1^*)^2 - k_\perp^2]^{-1/2} dE_1^* = \\ = \frac{32k_\perp}{m_\tau^4} \left\{ m_\tau \left( \frac{m_\tau^2}{4} - k_\perp^2 \right)^{1/2} - k_\perp^2 \ln \left[ \frac{m_\tau}{2k_\perp} + \left( \frac{m_\tau^2}{4} - k_\perp^2 \right)^{1/2} k_\perp^{-1} \right] \right\}. \quad (3.65)$$

На границах допустимого интервала значений  $k_\perp$  ( $0 \leq k_\perp \leq m_\tau/2$ ) распределение (3.65) обращается в нуль. Максимум этого распределения, как показывает численный анализ, осуществляется вблизи значения  $k_\perp \approx m_\tau/4$ .

Другим примером может служить полуплептонный распад каона

$$K \rightarrow \pi + l^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e).$$

Распределение в системе покоя каона имеет следующий вид [11]:

$$\frac{dw}{dE_1^* d\Omega_1^*} = \frac{24}{\pi m^4} (m - 2E_1^*) (E_1^*)^2, \quad (3.66)$$

где  $m$  — масса каона,  $E_1^*$  — энергия лептона. Совершая замену переменной (3.58) и интегрируя (3.66) по  $\varphi_1^*$  и по  $E_1^*$  в пределах  $k_\perp < E_1^* < m/2$ ,



находим распределение по поперечному импульсу лептона:

$$\frac{dw}{dk_1} = m_4^{-4} 48k_1 \left\{ m \left( \frac{m^2}{4} - k_1^2 \right)^{1/2} - 2k_1^2 \ln \left[ \frac{m}{2k_1} + \left( \frac{m^2}{4} - k_1^2 \right)^{1/2} k_1^{-1} \right] \right\}. \quad (3.67)$$

Максимум распределения (3.67), как показывает детальный численный анализ, также находится вблизи значения  $k_1 \approx m/4$ .

Таким образом, в ряде случаев, когда другие методы кинематического анализа оказываются неприменимыми, изучение распределений по поперечному импульсу в трехчастичных распадах может дать сведения о массе нестабильной частицы по положению максимума этого распределения. Относительная грубость такого метода искупается его исключительной простотой. К сожалению, до сих пор эффективность этого способа идентификации трехчастичных распадов обсуждалась только на теоретическом уровне (см., например, [12]).

### 3.5. Конус распада

Кинематика распада на три фотона. В разделе 2.4 было показано, что в распадах на лету на две безмассовые частицы (например,  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ) угол их разлета не может оказаться меньше некоторого определенного значения (2.70), называемого минимальным углом разлета. При распадах на лету на три безмассовые частицы, как можно показать, существует минимально возможный угол разлета всех трех продуктов распада. Это кинематическое свойство было сформулировано и обосновано теоретически в процессе экспериментального обнаружения и исследования распада векторного  $\omega^0$ -мезона на нейтральный пион и фотон [20]:

$$\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma. \quad (3.68)$$

В результате последующего распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  процесс (3.68) выглядит как распад на три фотона:

$$X \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma. \quad (3.69)$$

Чтобы подчеркнуть общность рассматриваемого ниже метода поиска процессов типа (3.69) через  $X$  обозначена первичная нестабильная частица. Используя только углы разлета фотонов нельзя вычислить массу частицы  $X$ . Для этой цели необходимо дополнительно измерить энергию всех фотонов. В эксперименте [20] такой возможности не было, но использованная в этом опыте пропан-ксеноновая пузырьковая камера эффективно регистрировала направления вылета фотонов по точкам их конверсии на электрон-позитронную пару и точке поглощения первичных монохроматических отрицательно заряженных пионов, вызывавших реакцию

$$\pi^- + p \rightarrow n + X \rightarrow n + 3\gamma. \quad (3.70)$$

Подчеркнем, что энергия (импульс) частицы  $X$  в Л-системе в данном случае не определена, но зато она известна в Ц-системе реакции (3.70), если

известна лабораторная энергия (импульс) налетающего пиона:

$$E_X = (s + m_X^2 - m_n^2)/2\sqrt{s}, \quad s = m_p^2 + m_\pi^2 + 2E_\pi m_p, \quad (3.71)$$

где  $m_p, m_n, m_\pi$  — массы протона, нейтрона, пиона,  $E_\pi$  — энергия пиона в Л-системе. Конечно, энергия  $E_X$  может быть вычислена на формуле (3.71), если известна масса  $m_X$  частицы  $X$ . Однако в эксперименте [20], как уже упоминалось, установить массу частицы  $X$  по эффективной массе трех фотонов было невозможно. Авторам [20] помогла кинематика, которая позволила идентифицировать канал реакции (3.70):

$$\pi^- + p \rightarrow n + \omega^0,$$

с последующим распадом  $\omega^0$  по схеме (3.68).

Дело в том, что измеренные в Л-системе углы вылета фотонов относительно направления импульса пиона с помощью релятивистских преобразований могут быть пересчитаны в Ц-систему реакции (3.70):

$$\cos \theta_i^* = (\cos \theta_i - v_c)/(1 - v_c \cos \theta_i). \quad (3.72)$$

Здесь  $\theta_i$  — полярный угол вылета одного из трех фотонов ( $i = 1, 2, 3$ ) в Л-системе;  $\theta_i^*$  — полярный угол вылета того же фотона в Ц-системе. Азимутальные углы вылета  $\varphi_i$  измеряются в плоскости, перпендикулярной направлению импульса пиона, и поэтому не изменяются при пересчете в Ц-систему. Скорость Л-системы относительно Ц-системы  $v_c = p_\pi/(E_\pi + m_\pi)$ , где  $E_\pi, p_\pi$  — энергия и модуль импульса пиона в Л-системе (см. (1.18)). Величина  $v_c$  известна. Зная направления вылета фотонов в Ц-системе, можно рассчитать и углы разлета  $\theta_{12}^*, \theta_{13}^*, \theta_{23}^*$  каждой пары фотонов в этой системе. Таким образом, геометрическая картина направлений импульсов фотонов, измеренная в Л-системе, полностью определена и в Ц-системе реакции (3.70). Это обстоятельство и оказывается решающим для реализации метода "конуса распада", разработанного в работе [20] (см. также [6], где этому методу уделено большое внимание).

Рассмотрим закон сохранения импульса в распаде (3.69) в системе отсчета, где частица  $X$  движется с фиксированной по модулю скоростью (энергией, импульсом):

$$p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = p_X n_X. \quad (3.73)$$

Здесь  $p_i$  — модули импульсов фотонов ( $i = 1, 2, 3$ ) в Ц-системе реакции (3.70),  $p_X$  — модуль импульса нестабильной частицы  $X$  в той же системе отсчета,  $n_i$  — единичные векторы направлений импульсов фотонов  $p_i$ ,  $n_X$  — единичный вектор направления импульса  $p_X$  частицы  $X$ .

Концы трех единичных векторов  $n_i$ , выходящих из одной точки  $O$  (рис. 3.3), находятся в одной плоскости и через них можно провести окружность, которая является основанием кругового конуса. Прямая  $OO'$  ( $O'$  — центр окружности) образует ось конуса; она перпен-

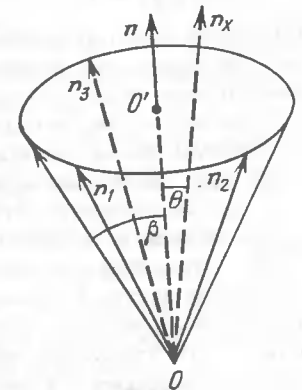


Рис. 3.3. Конус распада:  $\beta$  — угол полураствора конуса,  $\theta$  — угол между направлением  $n_X$  и осью конуса

дикулярна плоскости его основания. Векторы  $\mathbf{n}_i$  служат образующими конуса. Указанные геометрические построения элементарны и доказывают, что векторы импульсов фотонов находятся на поверхности кругового конуса. Направление вектора  $\mathbf{p}_X$ , отмеченное на рис. 3.3 единичным вектором  $\mathbf{n}_X$ , образует с осью конуса угол  $\theta$  (направление оси конуса указано на рис. 3.3 вектором  $\mathbf{n}$ , нормальным к плоскости основания конуса). Векторы  $\mathbf{n}_i$  образуют с осью конуса один и тот же угол  $\beta$ , который является углом полураствора конуса. Проектируя соотношение (3.73) на направление оси конуса  $\mathbf{n}$ , находим

$$(p_1 + p_2 + p_3) \cos \beta = p_X \cos \theta. \quad (3.74)$$

Так как масса фотона  $m_\gamma = 0$ , то его энергия  $E_i$  и модуль импульса  $p_i$  равны друг другу. Поэтому из закона сохранения энергии в распаде (3.69) устанавливаем, что  $E_X = E_1 + E_2 + E_3 = p_1 + p_2 + p_3$ , где  $E_X$  — полная энергия частицы  $X$ ,  $E_i$  — энергии фотонов. Соотношение (3.74) представляет тогда в следующей форме, не содержащей энергий фотонов:

$$E_X \cos \beta = p_X \cos \theta, \quad (3.75)$$

или через скорость частицы  $X$ :

$$\cos \beta = v_X \cos \theta.$$

Формула (3.75) связывает угол полураствора конуса распада, образованного импульсами фотонов, скорость частицы  $X$  и направление ее импульса относительно оси конуса.

Угол полураствора конуса фотонных импульсов в Ц-системе реакции (3.70) может быть вычислен на основе экспериментальных данных об углах вылета фотонов в Л-системе и формул преобразований (3.72). Скорость частицы  $X$  в Ц-системе в условиях, когда известна энергия налетающего пиона в Л-системе реакции (3.70), является функцией массы частицы  $X$ . Угол  $\theta$  между импульсом частицы  $X$  и осью конуса неизвестен, так как неизвестны энергии фотонов. Однако возможные пределы изменения этого угла устанавливаются из геометрических соображений. В системе покоя частицы  $X$  импульсы фотонов находятся в одной плоскости, так как они образуют треугольник вследствие закона сохранения импульса (3.2):

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^* = 0.$$

Плоскость этого треугольника ориентирована в пространстве произвольным образом (см. раздел 3.1). Следовательно, вектор  $\mathbf{p}_X$  ориентирован относительно этой плоскости произвольным образом.

Если вектор  $\mathbf{p}_X$  находится в плоскости (3.2), то при преобразовании из системы покоя частицы  $X$  в систему отсчета, где частица  $X$  движется (например, Ц-система реакции (3.70)), все импульсы фотонов  $\mathbf{p}_i$  останутся в той же плоскости. Это означает, что при значении угла  $\theta = \pi/2$  (вектор  $\mathbf{p}_X$  находится в плоскости распада) угол полураствора конуса распада  $\beta = \pi/2$ . Эти результаты согласуются с соотношением (3.75).

Если же вектор  $\mathbf{p}_X$  ориентирован нормально к плоскости распада (3.2), то ось конуса распада и направление вектора  $\mathbf{p}_X$  совпадают друг с другом; угол  $\theta = 0$ . Это следует из формул релятивистского преобразования энергий и продольных составляющих импульсов фотонов из системы покоя

частицы  $X$  в систему, где частица  $X$  движется с импульсом  $\mathbf{p}_X$ , перпендикулярным плоскости (3.2) [6]:

$$E_i = [E_X E_i^* + (\mathbf{p}_X \mathbf{p}_i)]/m_X, \quad p_i \cos \theta_i = [E_X p_i^* \cos \theta_i^* + p_X E_i^*]/m_X,$$

$E_i^*$ ,  $\mathbf{p}_i^*$ ,  $\theta_i^*$  — энергия, импульс, угол вылета одного из фотонов ( $i = 1, 2, 3$ ) по отношению к направлению вектора  $\mathbf{p}_X$  в системе покоя частицы  $X$ ;  $E_i$ ,  $\mathbf{p}_i$ ,  $\theta_i$  — те же величины в системе, где частица  $X$  движется. Так как угол между  $\mathbf{p}_X$  и плоскостью (3.2) равен  $\pi/2$ , то и  $\theta_i^* = \pi/2$ . Поэтому  $E_i m_X = E_X E_i^*$ ,  $p_i m_X \cos \theta_i = p_X E_i^*$ . Поскольку для фотонов  $E_i = p_i$ ,

$$\cos \theta_i = p_X/E_X = v_X. \quad (3.76)$$

Угол вылета фотона  $\theta_i$  оказывается в рассматриваемом случае одним и тем же для всех фотонов (см. 3.76) независимо от их энергий. Это означает, что вектор  $\mathbf{p}_X$  определяет направление оси конуса распада при  $\theta = 0$ , так как, согласно (3.75), при  $\theta = 0 \cos \beta = v_X$  и, следовательно,  $\theta_i = \beta$ .

Таким образом, установлено, что угол  $\theta$  изменяется в пределах

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Соответственно, косинус угла полураствора конуса  $\beta$  изменяется в пределах

$$0 \leq \cos \beta \leq v_X. \quad (3.77)$$

Правое из неравенств (3.77) устанавливает минимальное возможное значение угла полураствора конуса распада, которое определяется массой частицы  $X$  при известном значении энергии соударения  $\sqrt{s}$  в Ц-системе реакции (3.70).

Это означает, что распределение событий распада (3.69) по углу полураствора конуса распада обрывается при значениях  $\beta < \beta_{\min}$ , где

$$\beta_{\min} = \arcsin(m_X/E_X). \quad (3.78)$$

Результат (3.78) вытекает из (3.77).

Угол полураствора конуса легко находится для распада (3.69) в Ц-системе реакции (3.70). Для этой цели необходимо измерить углы разлета между парами фотонов в Ц-системе реакции (3.70) или найти их расчетным путем с помощью формул релятивистского преобразования углов из Л-системы в Ц-систему. Установим сначала направление оси конуса распада. Для этого заметим, что векторы

$$\mathbf{e}_{21} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{e}_{31} = \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_1 \quad (3.79)$$

находятся в плоскости основания конуса распада (рис. 3.3). Произведение векторов (3.79)

$$[\mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{31}] = [\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3] + [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] + [\mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1]$$

определяет направление вектора  $\mathbf{n}$ , нормального к плоскости основания конуса. Это направление и есть направление оси конуса, относительно которого необходимо измерять угол его полураствора.

Нормированный на единичную длину вектор

$$n = \frac{[n_2 n_3] + [n_1 n_2] + [n_3 n_1]}{|[n_2 n_3] + [n_1 n_2] + [n_3 n_1]|} \quad (3.80)$$

Скалярное произведение любого из единичных векторов  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), определяющих направление импульсов фотонов  $p_i$  в Ц-системе реакции (3.70), на единичный вектор нормали  $n$  (3.80) равно косинусу угла полураствора конуса распада [6]:

$$(n_1 n) = \cos \beta = [n_1 [n_2 n_3]] / |N|. \quad (3.81)$$

Правая часть соотношения (3.81) выражается через косинусы углов разлета фотонов  $\theta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3; i \neq k$ ).

Модуль вектора  $N = [n_2 n_3] + [n_1 n_2] + [n_3 n_1]$  вычисляется на основе формулы векторной алгебры  $([ab][cd]) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$  и составляет

$$\sqrt{N^2} = [3 - z_{12}^2 - z_{23}^2 - z_{13}^2 - 2(z_{12}z_{23} + z_{23}z_{13} + z_{13}z_{12})]^{1/2}, \quad (3.82)$$

$$z_{ik} = (n_i n_k) = \cos \theta_{ik}.$$

Смешанное произведение векторов  $(n_1 [n_2 n_3])$  также выражается через углы разлета фотонов. Докажем это утверждение. Обозначим векторное произведение  $[n_2 n_3] = n_{23}$  и рассмотрим векторное произведение  $[n_1 n_{23}]$ , которое, по существу, является двойным векторным произведением  $[n_1 [n_2 n_3]]$ . Последнее можно раскрыть по формуле векторной алгебры  $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$ . Возведем вектор  $[n_1 n_{23}]$  в квадрат и воспользуемся формулой векторной алгебры

$$([n_1 n_{23}][n_1 n_{23}]) = (n_1 n_1)(n_{23} n_{23}) - (n_1 n_{23})(n_1 n_{23}).$$

Скалярное произведение  $(n_1 n_{23}) = (n_1 [n_2 n_3])$  является величиной, которую необходимо выразить через углы разлета фотонов. Учитывая, что

$$(n_1 n_1) = 1,$$

$$(n_{23} n_{23}) = ([n_2 n_3][n_2 n_3]) = (n_2 n_2)(n_3 n_3) - (n_2 n_3)(n_2 n_3) = 1 - z_{23}^2,$$

$$[n_1 n_{23}] = n_2(n_1 n_3) - n_3(n_1 n_2) = z_{13}n_2 - z_{12}n_3,$$

находим

$$(n_1 [n_2 n_3]) = [1 - z_{12}^2 - z_{23}^2 - z_{13}^2 + 2z_{12}z_{23}z_{13}]^{1/2}. \quad (3.83)$$

Таким образом, угол полураствора конуса распада в каждом событии (3.69) вычисляется с помощью формул (3.81) — (3.83) на основе данных об углах разлета фотонов  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  в Ц-системе реакции (3.70).

Распределение событий по углу раствора конуса. Распады типа (3.68) являются двухчастичными распадами. Поэтому квадрат модуля  $(|M|^2)$  инвариантной амплитуды такого распада, усредненный по спиновым состояниям первичной (неполяризованной) частицы и просуммированный по спиновым состояниям вторичного фотона, зависит только от масс частиц, участвующих в процессе. Поэтому импульсно-угловое распределение продуктов двухчастичного распада определяется только их инвариант-

ным фазовым объемом. Последующий распад  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  (или  $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ ), который приводит к наблюдаемому на опыте трехфотонному состоянию (3.69), также является двухчастичным. После суммирования по спиновым состояниям вторичных фотонов квадрат модуля амплитуды этого распада оказывается постоянной величиной, зависящей только от массы нестабильного нейтрального мезона (пиона или  $\eta$ ). Распределение вторичных фотонов по импульсам и углам в распаде (3.69) определяется их инвариантным трехчастичным фазовым объемом с учетом того обстоятельства, что эффективная масса той пары фотонов, которые возникают от распада вторичного мезона ( $\pi^0, \eta$ ), определяется как масса этого мезона.

Если заранее неизвестно, какая пара фотонов образовалась в результате двухфотонного распада, то следует учесть все возможные варианты, приписывая каждой паре фотонов массу мезона — "родителя" по очереди; далее следует просуммировать по всем возможностям. Фиксировать эффективную массу пары частиц можно, домножив фазовый объем на  $\delta$ -функцию:

$$\delta[(p_i + p_k)^2 - m^2], \quad (3.84)$$

где  $p_i, p_k$  — 4-импульсы двух из трех фотонов, индексы  $i \neq k$  нумеруют эти фотоны ( $i, k = 1, 2, 3$ ). В результате импульсно-угловое распределение фотонов в распаде (3.69) описывается следующим образом:

$$dw \sim \{\delta[(p_1 + p_2)^2 - m^2] + \delta[(p_2 + p_3)^2 - m^2] + \delta[(p_1 + p_3)^2 - m^2]\} \delta^{(4)}(p - p_1 - p_3) \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3}, \quad (3.85)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — 4-импульсы фотонов,  $p$  — 4-импульс первичной нестабильной частицы  $X$  с массой  $m_X$ ,  $m$  — масса вторичного мезона, распадающегося на два фотона,  $E_1, E_2, E_3$  — энергии фотонов.

Выражение (3.85) релятивистски инвариантно; оно учитывает двухступенчатость процесса образования трех фотонов (3.69) и равновероятность принадлежности любой пары фотонов к продуктам двухчастичного распада промежуточной частицы с массой  $m$ . Формула (3.85) является точной, если первичная частица  $X$  неполяризована, а по поляризационным (спиновым) состояниям фотонов проведено суммирование. Последнее требование автоматически выполняется, если поляризационные состояния фотонов экспериментально не различаются и все они включаются в экспериментальные данные равноправно. В силу релятивистской инвариантности исходной формулы (3.85) расчеты импульсно-угловых распределений фотонов удобно выполнять в системе покоя первичной нестабильной частицы  $X$ , где эти распределения имеют самую простую форму. Поскольку нас интересует распределение по углу полураствора конуса распада  $\beta$  (3.81), необходимо установить связь между этой величиной и угловыми характеристиками продуктов распада (3.69) в системе покоя частицы  $X$ . Ранее (см. (3.81)) была установлена связь между углом  $\beta$  и углами разлета пар фотонов в системе отсчета, где частица  $X$  двигалась с постоянной скоростью  $v_X$ . В этой системе отсчета угловые распределения событий выглядят довольно сложно, что сразу же выясняется при проведении интегрирований в правой части формулы (3.85) с помощью

пяти  $\delta$ -функций, позволяющих исключить пять из девяти кинематических переменных, характеризующих трехфотонное состояние.

При вычислении распределения по углу  $\beta$  следует выразить этот угол через обычные угловые переменные (углы вылета, разлета). Проведем сначала все возможные интегрирования в (3.85) с помощью  $\delta$ -функций в системе покоя частицы  $X$ . В этой системе формула (3.85) представляется в следующем виде:

$$dw \sim [\delta(m_X^2 - m^2 - 2m_X E_3^*) + \delta(m_X^2 - m^2 - 2m_X E_1^*) + \delta(m_X^2 - m^2 - 2m_X E_2^*)] E_1^* dE_1^* d\Omega_1^* E_2^* dE_2^* d\Omega_2^* \times (E_3^*)^{-1} \delta(m_X - E_1^* - E_2^* - E_3^*), \quad (3.86)$$

где  $E_{1,2,3}^*$  — энергия фотонов в системе покоя  $X$ ,  $d\Omega_{1,2}^*$  — элементы телесных углов, в которые вылетают фотоны 1 и 2 в этой системе (в каждом событии фотоны нумеруются произвольным образом, так как они являются тождественными частицами). Формула (3.86) есть результат интегрирования формулы (3.85) по трем компонентам импульса  $p_3^*$  одного из фотонов с помощью трехмерной  $\delta$ -функции, отражающей закон сохранения импульса  $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0$ . С учетом этого соотношения, энергия  $E_3^*$  выражается через импульсы фотонов 1 и 2:

$$E_3^* = [(p_1^* + p_2^*)^2]^{1/2},$$

или через энергии  $E_1^*$  и  $E_2^*$  и угол разлета  $\theta_{12}^*$  фотонов 1 и 2 в виде

$$E_3^* = [(E_1^*)^2 + (E_2^*)^2 + 2E_1^* E_2^* \cos \theta_{12}^*]^{1/2}. \quad (3.87)$$

Аргументы  $\delta$ -функций в квадратных скобках правой части формулы (3.86) раскрывались через кинематические переменные фотонов в системе покоя частицы  $X$  по следующему образцу:

$$(p_1 + p_2)^2 - m^2 = (p - p_3)^2 - m^2 = m_X^2 - m^2 - 2m_X E_3^*.$$

Оставшиеся в выражении (3.86)  $\delta$ -функции позволяют выполнить интегрирования по энергиям  $E_1^*$  и  $E_2^*$ . После несложных вычислений находим угловое распределение двух фотонов в распаде (3.69) в системе покоя  $X$ :

$$dw \sim \{ [4 \sin^3(\theta_{12}^*/2) (\sin^2(\theta_{12}^*/2) - (m/E_M^*)^2)^{1/2}]^{-1} + v_M^* (1 + v_M^* \cos \theta_{12}^*)^{-2} \} d\Omega_1^* d\Omega_2^*. \quad (3.88)$$

В формуле (3.88) первое слагаемое в фигурных скобках отвечает распределению по углу разлета фотонов 1 и 2, образовавшихся при двухфотонном распаде вторичного нейтрального мезона ( $\pi^0$ ,  $\eta$ ), появляющегося на первом этапе распада частицы  $X$ . В этом слагаемом имеется корневая особенность, связанная с существованием минимально возможного угла разлета. Второе слагаемое в фигурных скобках отражает ситуацию, когда один из пары фотонов 1 и 2 образуется на первом этапе распада частицы  $X$ , а другой является одним из продуктов двухфотонного распада, происходящего на втором этапе. В формуле (3.88) введены следующие обозначения:  $E_M^*$  — энергия вторичного нейтрального мезона, испытывающего двухфотонный распад,  $v_M^*$  — его скорость в системе покоя частицы  $X$ :

$$E_M^* = (m_X^2 + m^2)/2m, \quad v_M^* = (m_X^2 - m^2)/(m_X^2 + m^2).$$

Из формулы (3.88) видно, что в системе покоя  $X$  угловое распределение двух фотонов зависит только от их угла разлета  $\theta_{12}^*$ . Отметим, что при получении результата (3.88) все интегрирования по кинематическим переменным вторичных частиц были выполнены с помощью  $\delta$ -функций. Это означает, что в распределении (3.88) учтены все кинематические соотношения, следующие из законов сохранения энергии и импульса.

Угол полураствора конуса распада  $\beta$  должен выражаться через оставшиеся в формуле (3.88) угловые переменные; например,  $\theta_1^*$ ,  $\varphi_1^*$ ,  $\theta_2^*$ ,  $\varphi_2^*$  или  $\theta_1^*$ ,  $\varphi_1^*$ ,  $\theta_{12}^*$ ,  $\varphi_2^*$ , где  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  — полярные углы вылета фотонов,  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  — азимутальные углы вылета. Угол разлета  $\theta_{12}^*$  связан с углами вылета по теореме косинусов:

$$\cos \theta_{12}^* = \cos \theta_1^* \cos \theta_2^* + \sin \theta_1^* \sin \theta_2^* \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*).$$

Напомним также, что углы вылета  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  — отсчитываются от направления  $v_X$  скорости частицы  $X$ , вдоль которого совершается релятивистское преобразование из Л-системы, где частица  $X$  движется, в систему ее покоя.

Азимутальные углы  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  можно отсчитывать от любого заданного направления в плоскости, перпендикулярной вектору  $v_X$ . Угол разлета можно рассматривать как угол вылета частицы 2 относительно направления импульса частицы 1. Тогда азимутальный угол вылета частицы 2 ( $\varphi_2^*$ ) можно отсчитывать от любого заданного направления в плоскости, перпендикулярной импульсу частицы 1. Конкретно: направим ось  $z$  декартовой системы координат вдоль вектора  $n_1^*$  — единичного вектора, характеризующего в системе покоя  $X$  направление импульса фотона 1 (рис. 3.4, а).

Единичный вектор  $n_X$  в направлении скорости  $v_X$  частицы  $X$  поместим в плоскости  $xz$ , используя произвол в выборе направлений осей  $x$  и  $y$  в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Азимутальный угол вылета фотона 2 будем отсчитывать от плоскости  $xz$  (эту плоскость образуют векторы  $n_1^*$  и  $n_X$ ). Углы  $\theta_1^*$ ,  $\theta_{12}^*$  и  $\varphi_2^*$  показаны на рис. 3.4, а. Таким образом, элемент телесного угла фотона 2 можно представить в выбранной системе сферических координат в форме  $d\Omega_2^* = d \cos \theta_{12}^* d\varphi_2^*$ .

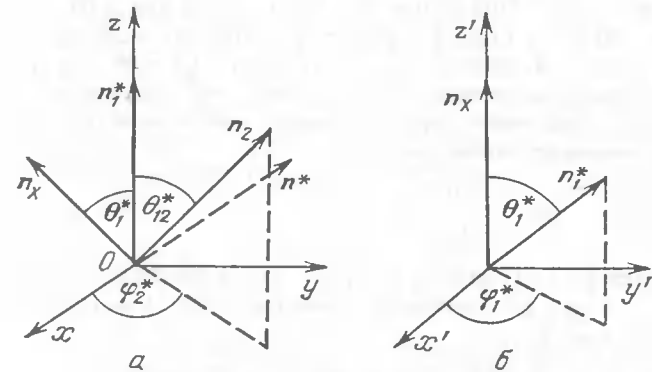


Рис. 3.4. Система сферических координат для интегрирования по углам вылета фотона 2 (схема а) и фотона 1 (схема б) в формуле (3.88)

В системе покоя частицы  $X$  импульсы фотонов находятся в одной плоскости. Это, очевидно, означает, что в этой системе угол полураствора конуса распада  $\beta^*$  всегда один и тот же:  $\beta^* = \pi/2$ . Ось конуса нормальна к плоскости распада, а ее направление в пространстве характеризуется векторным произведением векторов  $\mathbf{n}_1^*$  и  $\mathbf{n}_2^*$ :

$$\mathbf{n}^* = [\mathbf{n}_1^* \mathbf{n}_2^*] / \sin \theta_{12}^*, \quad |\mathbf{n}^*| = 1.$$

Вектор  $\mathbf{n}^*$  представлен на рис. 3.4, *a* штриховым отрезком и находится в плоскости  $xu$ , будучи нормальным к плоскости векторов  $\mathbf{n}_1^*$  и  $\mathbf{n}_2^*$ . Обозначим угол между векторами  $\mathbf{n}^*$  и  $\mathbf{n}_X$  через  $\theta^*$ :  $(\mathbf{n}^* \mathbf{n}_X) = \cos \theta^*$ . В системе координат, изображенной на рис. 3.4, *a*, компоненты рассматриваемых единичных векторов равны

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_X &= (\sin \theta_1^*, 0, \cos \theta_1^*), \quad \mathbf{n}_1^* = (0, 0, 1), \\ \mathbf{n}_2^* &= (\sin \theta_{12}^* \cos \varphi_2^*, \sin \theta_{12}^* \sin \varphi_2^*, \cos \theta_{12}^*). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Руководствуясь определением векторного произведения двух векторов, находим декартовы компоненты вектора  $\mathbf{n}^*$ :

$$\mathbf{n}^* = (-\sin \varphi_2^*, \cos \varphi_2^*, 0). \quad (3.90)$$

Далее легко найти связь между углом  $\theta^*$  и углами  $\theta_1^*$  и  $\varphi_2^*$ . Из формул (3.89), (3.90) следует

$$(\mathbf{n}_X \mathbf{n}^*) = \cos \theta^* = -\sin \theta_1^* \sin \varphi_2^*. \quad (3.91)$$

Сумма углов  $\theta^* + \beta^* = \theta_\gamma^*$  составляет угол  $\theta_\gamma^*$  фотона, импульс которого  $\mathbf{p}_\gamma^*$  расположен одновременно и в плоскости векторов  $\mathbf{n}_1^*$ ,  $\mathbf{n}_2^*$  (в силу закона сохранения импульса) и в плоскости векторов  $\mathbf{n}_X$  и  $\mathbf{n}^*$ , причем  $\mathbf{p}_\gamma^* \perp \mathbf{n}^*$ . При релятивистском преобразовании вдоль направления  $\mathbf{n}_X$  вектор  $\mathbf{p}_\gamma^*$  всегда будет находиться в плоскости, образуемой осью конуса распада и вектором  $\mathbf{n}_X$ . После этих замечаний, формулу (3.91) можно переписать с учетом соотношения  $\cos \theta^* = \cos(\theta_\gamma^* - \beta^*) = -\sin \theta_\gamma^*$  в следующей форме:

$$\sin \theta_\gamma^* = \sin \theta_1^* \sin \varphi_2^*. \quad (3.92)$$

Угол  $\theta_\gamma^*$  можно выразить через угол вылета фотона в любой инерциальной системе отсчета. Этот фотон, как уже упоминалось, находится в той же плоскости, что и ось конуса и вектор  $\mathbf{n}_X$ . Поэтому в системе отсчета, где частица  $X$  движется выполняется соотношение  $\theta_\gamma = \theta + \beta$ , где  $\beta$  — угол полураствора конуса распада,  $\theta$  — угол между  $\mathbf{n}_X$  и осью конуса. Согласно формуле релятивистского преобразования для угла вылета фотонов по отношению к направлению скорости  $v_X$

$$\sin \theta_\gamma^* = \sqrt{1 - v_X^2} \frac{\sin \theta_\gamma}{1 - v_X \cos \theta_\gamma}. \quad (3.93)$$

Подставляя в (3.93) вместо  $\theta_\gamma$  сумму углов  $\theta + \beta$  и учитывая соотношение между углами  $\theta$  и  $\beta$ , доказанное ранее (см. (3.75)), находим

$$\sin \theta_\gamma^* = \frac{\sqrt{1 - v_X^2}}{v_X} \operatorname{tg} \beta. \quad (3.94)$$

Комбинируя формулы (3.92) и (3.94), можно установить связь между углом полураствора конуса  $\beta$  и независимыми угловыми переменными фотонов  $\theta_1^*$  и  $\varphi_2^*$  в системе покоя частицы  $X$ :

$$v_X \operatorname{tg} \beta \sin \theta_1^* \sin \varphi_2^* = \sqrt{1 - v_X^2}. \quad (3.95)$$

С помощью (3.95) можно перейти, например, от переменной  $\varphi_2^*$  к переменной  $\beta$ :

$$d\varphi_2^* = \frac{2 \sqrt{1 - v_X^2} d\beta}{v_X \sin \theta_1^* |\cos \varphi_2^*| \sin^2 \beta}. \quad (3.96)$$

Множитель 2 в (3.96) учитывает область изменения  $\varphi_2^*$  от 0 до  $2\pi$ . Поскольку связь между  $\sin \varphi_2^*$  и  $\cos \varphi_2^*$  двузначная:

$$\cos \varphi_2^* = \pm (v_X^2 - \cos^2 \beta - v_X^2 \sin^2 \beta \cos^2 \theta_1^*)^{1/2} / (v_X \sin \theta_1^* \sin \beta), \quad (3.97)$$

а подынтегральная функция в (3.88) не зависит от  $\cos \varphi_2^*$ , то в (3.96) следует подставить (3.97) и получившийся в правой части результат удвоить:

$$d\varphi_2^* = \frac{4}{\sin \beta} \left( \frac{1 - v_X^2}{v_X^2 - \cos^2 \beta - v_X^2 \sin^2 \beta \cos^2 \theta_1^*} \right)^{1/2} d\beta. \quad (3.98)$$

Итак, в распределении (3.88) можно провести интегрирование по  $\varphi_1^*$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , выбрав сферические координаты  $\theta_1^*$  и  $\varphi_1^*$  так, как это показано на рис. 3.4, *б*. Затем провести интегрирование по  $\theta_{12}^*$ , причем в первом слагаемом в фигурных скобках (3.88) — в пределах  $(m/E_M^*) \leq \sin(\theta_{12}^*/2) \leq 1$ , а во втором — в пределах  $-1 \leq \cos \theta_{12}^* \leq 1$ .

После выполнения этих элементарных действий, получаем результат,

$$dw = d \cos \theta_1^* d\varphi_2^* / 4\pi, \quad (3.99)$$

нормированный на единичную полную вероятность. Совершая замену переменной (3.98), находим

$$\frac{dw}{d\beta} = \frac{\sqrt{1 - v_X^2}}{\pi v_X \sin^2 \beta} \int_{-B}^B \frac{d \cos \theta_1^*}{\sqrt{B^2 - \cos^2 \theta_1^*}},$$

где  $B = (v_X^2 - \cos^2 \beta)^{1/2} / v_X \sin \beta$ . Пределы интегрирования по  $\cos \theta_1^*$ ,  $(-B \leq \cos \theta_1^* \leq B)$  вытекают из требования положительности подкоренного выражения в формулах (3.97), (3.98). После интегрирования по  $\cos \theta_1^*$  окончательно получаем распределение событий по углу полураствора конуса распада [20]:

$$\frac{dw}{d\beta} = \frac{\sqrt{1 - v_X^2}}{v_X \sin^2 \beta} \theta(\beta - \beta_{\min}). \quad (3.100)$$

Распределение (3.100) не имеет особенностей, оно плавно убывает с ростом переменной  $\beta$  от минимального возможного значения (3.78) до  $\pi/2$ . Левее значения  $\beta = \beta_{\min}$  распределение (3.100) резко обрывается, что и отраже-

но наличием  $\theta$ -функции, определенной следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Заканчивая эту главу, отметим, что в литературе можно найти довольно много задач, в которых вопросы косвенной идентификации частиц и процессов в условиях, когда полная кинематическая информация отсутствует, решаются методами численного моделирования. Ряд таких проблем обсуждается в книге [6]. Это замечание отнюдь не исключает возможности обнаружения новых полезных кинематических эффектов чисто аналитическими методами и оставляет простор для творческого поиска в этом направлении.

## УПРУГИЕ И КВАЗИУПРУГИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ

### 4.1. Кинематика процессов двухчастичного рассеяния

Мандельштамовские инвариантные переменные. В рамках кинематики процессы превращения двух первичных частиц в две вторичные (см. (1.23), (1.24)) отличаются от процессов двухчастичного распада тем, что в начальном состоянии реакции



существуют две частицы, эффективная масса которых  $\sqrt{s}$  не задана и может принимать любые значения, превышающие сумму масс частиц  $A$  и  $B$  ( $\sqrt{s} \geq m_A + m_B$ ). Если  $m_C + m_D \geq m_A + m_B$ , то физически возможные значения  $\sqrt{s} \geq m_C + m_D$ . Далее для общности рассматривается квазиупругий процесс (1.24), в котором участвуют частицы с различными массами. Переход в формулах к случаю одинаковых масс совершается с помощью простой подстановки. Инвариант  $\sqrt{s}$  является существенной кинематической переменной (см. раздел 1.4), от которой зависит квадрат модуля амплитуды ( $|M|^2$ ) и определяется в Л-системе энергией налетающей частицы:

$$s = (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B. \quad (4.1)$$

В Ц-системе

$$s = (E_A^* + E_B^*)^2. \quad (4.2)$$

Переменная  $s$  характеризует начальное состояние взаимодействующих частиц. Конечное состояние  $C + D$  определяется, наряду с переменной  $\sqrt{s}$ , еще одним кинематическим инвариантом, который можно выбрать в одной из двух форм:

$$t = (p_A - p_C)^2 = (p_D - p_B)^2, \quad (4.3)$$

$$u = (p_A - p_D)^2 = (p_C - p_B)^2. \quad (4.4)$$

Переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  и называют мандельштамовскими инвариантами. Они связаны между собой линейным соотношением

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2.$$

Динамика процесса (величина  $|M|^2$ ) зависит не только от  $s$ , но также и от переменной  $t$  (или  $u$ ). Таким образом, еще одно отличие процесса упругого или неупругого рассеяния от двухчастичного распада состоит



в том, что в последнем нет существенных кинематических переменных ( $|M|^2 = \text{const}$  в случае двухчастичного распада), а в первом — их две.

Выясним физический смысл переменной  $t(u)$ . Используя (4.3), (4.4), инвариант  $t(u)$  в Л-системе можно записать в форме

$$\begin{aligned} t &= m_A^2 + m_C^2 - 2E_A E_C + 2p_A p_C \cos \theta_C = m_B^2 + m_D^2 - 2m_B E_D, \\ u &= m_A^2 + m_D^2 - 2E_A E_D + 2p_A p_D \cos \theta_D = m_B^2 + m_C^2 - 2m_B E_C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из формул (4.5) следует, что инвариант  $t(u)$  линейно связан с энергией  $E_C$  ( $E_D$ ) одной из вторичных частиц, которая, в свою очередь, однозначно определяет косинус угла вылета  $\theta_C$  ( $\theta_D$ ) одной из вторичных частиц в Л-системе. Используя закон сохранения энергии  $E_A + m_B = E_C + E_D$ , находим из (4.5) связь между углом вылета и энергией вторичной частицы:

$$\begin{aligned} \cos \theta_C &= (2p_A p_C)^{-1} \{2[(E_A + m_A)E_C - m_B E_A] + m_D^2 - m_A^2 - m_C^2 - m_A^2\}, \\ \cos \theta_D &= (2p_A p_D)^{-1} \{2[(E_A + m_B)E_D - m_B E_A] + m_C^2 - m_A^2 - m_D^2 - m_B^2\}, \\ p_{A,C,D} &= (E_{A,C,D}^2 - m_{A,C,D}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таким образом, в Л-системе вместо двух инвариантных переменных  $s, t(u)$ , процесс перехода двух частиц в две можно описывать любой парой переменных  $(E_A, E_D)$ ,  $(E_A, \cos \theta_C)$ ,  $(E_A, E_C)$ ,  $(E_A, \cos \theta_D)$ .

Можно выразить инвариант  $t(u)$  через кинематические переменные Ц-системы:

$$\begin{aligned} t &= m_A^2 + m_C^2 - 2E_A^* E_C^* + 2p_A^* p_C^* \cos \theta_C^*, \\ u &= m_A^2 + m_D^2 - 2E_A^* E_D^* + 2p_A^* p_D^* \cos \theta_D^*. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В Ц-системе выполняются условия  $p_A^* + p_B^* = 0$ ,  $p_C^* + p_D^* = 0$ . Поэтому  $\theta_D^* = \pi - \theta_C^*$  и  $\cos \theta_D^* = -\cos \theta_C^*$ , а энергия (модуль импульса) частиц выражается через инварианты и массы:

$$\begin{aligned} E_A^* &= (s + m_A^2 - m_B^2)/2\sqrt{s}, & E_B^* &= (s + m_B^2 - m_A^2)/2\sqrt{s}, \\ E_C^* &= (s + m_C^2 - m_D^2)/2\sqrt{s}, & E_D^* &= (s + m_D^2 - m_C^2)/2\sqrt{s}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Формулы типа (4.8) уже выводились ранее при рассмотрении фазового объема двухчастичных состояний в Ц-системе (см. разделы 1.5, 2.1). В Ц-системе энергии всех частиц определяются только инвариантом  $s$ .

Переменная  $t(u)$  характеризует угол рассеяния  $\theta_C^*$  ( $\theta_D^*$ ) в Ц-системе по отношению к оси соударения первичных частиц. Поэтому вместо инвариантных переменных  $s, t(u)$  можно использовать в качестве кинематических переменных энергию одной из первичных частиц и угол вылета вторичной в Ц-системе: например,  $E_A^*$  и  $\cos \theta_C^*$ . Таким образом, инвариант  $s$  описывает кинематическое состояние начальных частиц, а инвариант  $t(u)$  при фиксированном  $s$  описывает кинематическое состояние вторичных частиц. Этот инвариант часто называют инвариантным квадратом переданного 4-импульса

$$q = p_A - p_C = p_D - p_B, [q^2 = t], q' = p_A - p_D = p_C - p_B, [(q')^2 = u].$$

4-импульсы  $q, q'$  характеризуют различия в 4-импульсах одной из первичных и одной из вторичных частиц.

Отметим, что в процессах превращения двух частиц в две имеется еще одна тривиальная кинематическая переменная (см. раздел 1.4): азимутальный угол  $\varphi$  вылета одной из вторичных частиц, который отсчитывается от произвольного направления в плоскости, перпендикулярной оси налетающего пучка частиц (в Л-системе) или оси соударения частиц  $A$  и  $B$  (в Ц-системе). Конфигурация импульсов двух вторичных частиц может занимать произвольное положение относительно вращений вокруг такой оси, если не учитываются спиновые эффекты. Из-за указанного произвола, связанного с цилиндрической симметрией задачи рассеяния, распределение событий по азимутальному углу вылета любой из вторичных частиц оказывается равновероятным во всем интервале  $0 \leq \varphi_{C,D} \leq 2\pi$ .

**Кинематические ограничения в Ц-системе реакции.** Проведенный выше анализ кинематических переменных, соответствующих упругому рассеянию или квазиупругой реакции показывает, что кинематика в рамках статистической гипотезы не позволяет, даже в таком простом случае, рассчитать зависимость сечения процесса от инварианта  $s$  и формы распределения событий по переменной  $t(u)$  при фиксированном значении  $s$ .

Такие предсказания — это задача динамики.

Тривиальное предсказание равновероятного распределения событий по азимутальному углу вылета, есть следствие геометрической симметрии задачи, а не заслуга кинематики.

Тем не менее можно извлечь пользу из кинематики при исследовании динамики двухчастичных и квазидвухчастичных реакций. Кинематика накладывает ограничения на кинематические переменные. Поскольку такого рода ограничения основываются на законах сохранения энергии и импульса, они должны выполняться при любой динамике. Одно из важнейших ограничений уже получено ранее. Оно заключено в формулах (4.8), которые фиксируют энергии вторичных частиц в Ц-системе реакции при заданной энергии  $\sqrt{s}$ .

Угол вылета одной из частиц  $\theta_C^*$  в Ц-системе упругого или двухчастичного квазиупругого взаимодействия изменяется в геометрических пределах  $0 \leq \theta_C^* \leq \pi$ , поскольку в этой системе отсчета нет кинематических запретов на пространственную ориентацию конфигурации импульсов вторичных частиц ( $p_C^* + p_D^* = 0$ ). Распределение событий по переменной  $t(u)$  определяется в данном случае динамикой, которая диктует форму распределения по той или иной существенной переменной, не нарушая выводов кинематики о допустимых интервалах изменения такой переменной. Если известно направление вылета одной из вторичных частиц в Ц-системе, то известно и направление вылета  $\theta_D^*$  ее партнера:  $\theta_D^* = \pi - \theta_C^*$ . Другими словами, угол разлета вторичных частиц в Ц-системе всегда равен  $180^\circ$ . Это заключение тривиально, но его можно, в принципе, эффективно использовать для отбора конечных двухчастичных состояний на фоне многочастичных, когда регистрируются только две вторичные частицы. Если в Ц-системе они разлетаются под углом, меньшим  $180^\circ$ , то это заведомо не двухчастичное конечное состояние. Если же разлет происходит под углом  $180^\circ$ , то измерение энергий вторичных частиц в Ц-системе позволяет провести дополнительный отбор событий, удовлетворяющих или не удовлетворяющих критериям двухчастичной кинематики. Кинематические критерии двухчастичности

реакции (фиксированные энергии вторичных частиц, их разлет под углом  $180^\circ$ ) — строгое следствие законов кинематики. Однако на практике использование этих критериев — не всегда простая задача из-за наличия экспериментальных погрешностей.

**Кинематические ограничения на углы вылета в Л-системе.** В этой системе отсчета угол вылета одной из вторичных частиц связан с ее энергией однозначно по формулам (4.6).

Формулы (4.6) для  $\cos\theta_C$  и  $\cos\theta_D$  переходят друг в друга при взаимной замене индексов  $C$  и  $D$ . Поэтому рассмотрим только связь  $\cos\theta_C$  с энергией  $E_C$ . Если выразить энергию налетающей частицы  $A$  через инвариант  $s$ :

$$E_A = (s - m_A^2 - m_B^2)/2m_B,$$

то формула (4.6) для  $\cos\theta_C$  представляется выражением

$$\cos\theta_C = (p_A p_C)^{-1} [E_C(E_A + m_B) - \sqrt{s} E_C^*],$$

где  $E_C^*$  — энергия частицы  $C$  в Ц-системе. Разрешая это равенство относительно  $p_C$ , находим связь между импульсом вторичной частицы и углом ее вылета в Л-системе:

$$p_C^{(1,2)} = \frac{\sqrt{s} E_C^* p_A \cos\theta_C \pm (E_A + m_B) [s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2\theta_C]^{1/2}}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2\theta_C}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) напоминает соотношение (2.39), выражающее связь между импульсом частицы — продукта двухчастичного распада и углом ее вылета при распаде на лету. Если в формуле (2.39) массу нестабильной частицы заменить на эффективную массу  $\sqrt{s}$  двухчастичного состояния  $A + B$  в задаче рассеяния, а энергию нестабильной частицы заменить на энергию  $E_A + m_B$  взаимодействующих частиц  $A$  и  $B$  в Л-системе, то формула (2.39) перейдет в (4.9). С кинематических позиций в данном случае безразлично, имеется ли в начальном состоянии одна частица с фиксированной массой, энергией и импульсом или две частицы с заданной эффективной массой, полной энергией и импульсом. Связи (2.39) и (4.9), отражающие эти случаи имеют аналогичную форму. Поэтому трактовка двузначности связи (4.9) совпадает с интерпретацией связи (2.39).

При выполнении неравенства  $m_{CPA} \leq \sqrt{s} p_C^*$  подкоренное выражение в (4.9) положительно определено при любых значениях угла  $\theta_C$  из области:  $0 \leq \theta_C \leq \pi$ . В этом случае связь (4.9) оказывается однозначной:

$$p_C = \frac{\sqrt{s} E_C^* p_A \cos\theta_C + (E_A + m_A) [s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2\theta_C]^{1/2}}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2\theta_C}. \quad (4.10)$$

Решение со знаком "—" в числителе правой части формулы (4.9) не удовлетворяет требованию положительности модуля импульса:  $|p_C| = p_C > 0$ .

Отметим также, что неравенство  $m_{CPA} \leq \sqrt{s} p_C^*$  можно преобразовать к виду

$$p_A/(E_A + m_B) \leq v_C^*, \quad (4.11)$$

где  $v_C^*$  — скорость частицы  $C$  в Ц-системе, а величина  $p_A/(E_A + m_B)$  — скорость движения Ц-системы частиц  $A$  и  $B$  относительно Л-системы (см.

(1.18)). Ситуация аналогична случаю двухчастичного распада на лету: если скорость вторичной частицы  $v_C^*$  в Ц-системе превышает скорость Ц-системы относительно Л-системы, то угол вылета  $\theta_C$  в Л-системе может изменяться в геометрических пределах, а связь импульс — угол вылета однозначна. Формула (4.10) приводит к следующей связи между энергией  $E_C$  и углом вылета  $\theta_C$ :

$$E_C = \frac{\sqrt{s} E_C^* (E_A + m_B) + p_A \cos\theta_C [s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2\theta_C]^{1/2}}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2\theta_C}. \quad (4.12)$$

При выполнении неравенства, обратного (4.11):

$$v_C^* \leq p_A/(E_A + m_B), \quad (4.13)$$

угол вылета  $\theta_C$  оказывается ограниченным сверху ( $0 \leq \sin\theta_C \leq \sqrt{s} p_C^*/m_{CPA}$ ):

$$0 \leq \theta_C \leq \arcsin(\sqrt{s} p_C^*/m_{CPA}), \quad (4.14)$$

т.е. существует максимальный возможный угол вылета частицы  $C$ . В случае выполнения неравенства (4.13), между величинами  $p_C$  и  $\theta_C$  имеет место двузначная связь (4.10). Одному и тому же значению  $\theta_C$  отвечают два различных значения импульса  $p_C^{(1,2)}$  (4.10) или энергии:

$$E_C^{(1,2)} = \frac{\sqrt{s} E_C^* (E_A + m_B) \pm p_A \cos\theta_C [s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2\theta_C]^{1/2}}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2\theta_C}. \quad (4.15)$$

После замены индекса  $C$  на индекс  $D$  все полученные результаты будут относиться также и к второй частице  $D$  конечного состояния.

В случае упругого рассеяния частиц  $A$  и  $B$ , когда  $C = A$  ( $m_C = m_A$ ), скорость первичной и вторичной частицы сорта  $A$  в Ц-системе

$$v_A^* = p_A^*/E_A^* = m_B p_A/(m_A^2 + m_B E_A),$$

а скорость первичной и вторичной частицы сорта  $B$  в Ц-системе

$$v_B^* = p_A/(E_A + m_B) = v \quad (4.16)$$

совпадает со скоростью Ц-системы относительно Л-системы. При этом неравенство (4.13) для вторичной частицы  $A$  выполняется, если  $m_B \leq m_A$ . Частица  $A$  в конечном состоянии вылетает тогда в ограниченном интервале углов

$$0 \leq \theta'_A \leq \arcsin(m_B/m_A).$$

Связь энергии и угла вылета двузначна:

$$E_A^{(1,2)} = \frac{(m_A^2 + m_B E_A)(E_A + m_B) \pm p_A^2 \cos\theta'_A [m_B^2 - m_A^2 \sin^2\theta'_A]^{1/2}}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2\theta'_A}. \quad (4.17)$$

Если же частица  $A$  легче, чем частица-мишень  $B$ , то угол вылета вторичной частицы  $A$  изменяется в геометрических пределах  $0 \leq \theta'_A \leq \pi$ , а ее энергия  $E_A'$  связана с углом вылета однозначно по формуле (4.17) со знаком "+" перед выражением в квадратных скобках.

Частица  $B$  в случае упругого рассеяния обладает в Ц-системе скоростью, определенной уравнением (4.16), эта скорость совпадает со скоростью этой системы относительно Л-системы. В данном случае угол  $\theta'_B$  вылета частицы  $B$  связан с ее энергией  $E'_B$  формулой

$$\cos \theta'_B = (E'_B - m_B)(E_A + m_B)/(p_A p'_B), \quad (4.18)$$

где  $p'_B = [(E'_B)^2 - m_B^2]^{1/2}$ . Правая часть равенства (4.18) положительно определена, так как  $E'_B \geq m_B$ . При  $p'_B \rightarrow 0$  ( $E'_B \rightarrow m_B$ )

$$\cos \theta'_B \approx p'_B(E_A + m_B)/2m_B p_A \rightarrow 0,$$

т.е. медленные частицы отдачи сорта  $B$  в результате рассеяния вылетают под углами, близкими к  $90^\circ$ . Этот простой анализ позволяет выбрать из двух решений, выражающих энергию  $E'_B$  через угол вылета  $\theta'_B$ :

$$E'_B = \frac{m_B[(E_A + m_B)^2 \pm p_A^2 \cos^2 \theta'_B]}{(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2 \theta'_B}, \quad (4.19)$$

единственное решение, имеющее физический смысл. Оно соответствует знаку "+" в числителе (4.19). Решение  $E'_B = m_B$  неприемлемо, поскольку энергия частицы  $A$  в конечном состоянии  $E'_A$  должна совпадать с первичной энергией  $E_A$  независимо от угла вылета  $\theta'_A$ , что противоречит полученным ранее результатам для  $E'_A$ . Следовательно, при упругом рассеянии частица отдачи  $B$  вылетает в конечном состоянии под углом

$$0 \leq \theta'_B \leq \pi/2, \quad (4.20)$$

а ее энергия и импульс связаны с углом вылета однозначно:

$$\begin{aligned} E'_B &= m_B[(E_A + m_B)^2 + p_A^2 \cos^2 \theta'_B]/[(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2 \theta'_B], \\ p'_B &= 2m_B p_A (E_A + m_B) \cos \theta'_B / [(E_A + m_B)^2 - p_A^2 \cos^2 \theta'_B]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При равенстве масс частиц  $A$  и  $B$  ( $m_A = m_B$ ) для частицы  $A$  в конечном состоянии также существует ограничение (4.20):

$$0 \leq \theta'_A \leq \pi/2,$$

и однозначная связь типа (4.21) энергии  $E'_A$  с углом вылета

$$E'_A = m_A \frac{[(E_A + m_A) + (E_A - m_A) \cos^2 \theta'_A]}{[(E_A + m_A) - (E_A - m_A) \cos^2 \theta'_A]},$$

$$p'_A = 2m_A p_A \cos \theta'_A / [(E_A + m_A) - (E_A - m_A) \cos^2 \theta'_A].$$

**Ограничения на энергии вторичных частиц в Л-системе.** Вернемся теперь к общему случаю различных масс частиц  $A, B, C$  и  $D$  и выясним, в каких пределах может изменяться энергия вторичной частицы  $C$  ( $D$ ). Если скорость частицы  $C$  в Ц-системе меньше скорости  $v$  (см. (4.16)) движения Ц-системы относительно Л-системы, то существует двузначная связь энергии  $E_C$  (или импульса  $p_C$ ) с углом вылета  $\theta_C$  (см. (4.9), (4.15)) и предельный угол вылета (4.14). Максимальное и минимальное возможные значения энергии  $E_C$  достигаются в этом случае при вылете частицы  $C$  под нулевым углом  $\theta_C = 0$  (см. (4.15)). Максимальному значению  $E_C$  отве-

чает знак "+" в выражении (4.15), а минимальному — знак "−":

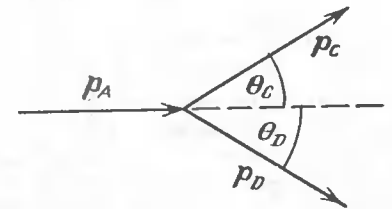
$$\frac{E_C^*(E_A + m_B) - p_C^* p_A}{\sqrt{s}} \leq E_C \leq \frac{E_C^*(E_A + m_B) + p_A p_C^*}{\sqrt{s}}. \quad (4.22)$$

Если же  $v_C^* > v$ , то энергия  $E_C$  изменяется в тех же пределах (4.22), но минимальное возможное значение энергии достигается при угле вылета  $\theta_C = 180^\circ$ , максимальное возможное — при  $\theta_C = 0$ . Результат (4.22) можно также получить, воспользовавшись формулой релятивистского преобразования энергии частицы  $C$  из Ц-системы в Л-систему:

$$E_C = (E_C^* + v p_C^* \cos \theta_C^*)/\sqrt{1 - v^2}.$$

При угле вылета в Ц-системе  $\theta_C^* = 0$  достигается максимальное значение

Рис. 4.1. Схема импульсов частиц в Л-системе квазидвухчастичной реакции



энергии  $E_C$  в Л-системе, а при  $\theta_C^* = 180^\circ$  — минимальное. С учетом соотношений  $\sqrt{s}/(E_A + m_B) = \sqrt{1 - v^2}$ ,  $v = p_A/(E_A + m_B)$  получим снова выражение (4.22), которое аналогично случаю двухчастичного распада, состояния с "массой"  $\sqrt{s}$ , импульсом  $p_A$  и полной энергией  $(E_A + m_B)$  (см. (2.20), (2.21)).

**Связь между углами вылета вторичных частиц в Л-системе.** В Л-системе (рис. 4.1) импульсы налетающей частицы  $A$  и образующихся частиц  $C$  и  $D$  находятся в одной плоскости. Следовательно, угол разлета вторичных частиц  $C$  и  $D$   $\theta_{CD} = \theta_C + \theta_D$ .

Установим связь между углами вылета  $\theta_C$  и  $\theta_D$ . Это можно сделать, воспользовавшись формулами релятивистских преобразований продольных и поперечных компонент импульсов частиц  $C$  и  $D$  из Ц-системы в Л-систему:

$$\begin{aligned} p_{C1} &= p_C \sin \theta_C = p_C^* \sin \theta_C^*, \\ p_{D1} &= p_D \sin \theta_D = p_D^* \sin \theta_D^* = p_D^* \sin \theta_C^*, \\ p_C \cos \theta_C &= (p_C^* \cos \theta_C^* + v E_C^*)/\sqrt{1 - v^2}, \\ p_D \cos \theta_D &= (p_D^* \cos \theta_D^* + v E_D^*)/\sqrt{1 - v^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $v = p/(E_A + m_B)$  — скорость Ц-системы относительно Л-системы (см. (1.18)). Учтено также, что в Ц-системе  $\theta_C^* + \theta_D^* = \pi$ . На основе выписанных выше соотношений находим

$$\begin{aligned} \tan \theta_C &= v_C^* \sqrt{1 - v^2} \sin \theta_C^* / (v + v_C^* \cos \theta_C^*), \\ \tan \theta_D &= v_D^* \sqrt{1 - v^2} \sin \theta_C^* / (v - v_D^* \cos \theta_C^*), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$v_C^*, v_D^*$  — скорости частиц  $C$  и  $D$  в Ц-системе. Величины  $v_C^*, v_D^*$  выражают-

ся через инвариант  $s$  и массы частиц  $i$ , следовательно, считаются заданными, если известны сорта всех частиц и энергия  $E_A$  налетающей частицы  $A$  в Л-системе. Отметим, что в формулах (4.23) нет величин, зависящих от импульсов или энергий частиц  $C$  и  $D$  в Л-системе. Угол  $\theta_C^*$  в (4.23) играет роль параметра, изменяющегося в пределах от нуля до  $\pi$ , а соотношения (4.23) являются параметрическими уравнениями, позволяющими найти уравнение, связывающее  $\theta_C$  и  $\theta_D$ . Исключая из уравнений (4.23)  $\sin \theta_C^*$ , находим

$$\operatorname{tg} \theta_C = v_C^* \operatorname{tg} \theta_D (v - v_D \cos \theta_C^*) / v_D (v + v_C^* \cos \theta_C^*), \quad (4.24)$$

$$\cos \theta_C^* = \frac{-g_C \operatorname{tg}^2 \theta_C \pm \{ (1 - v^2) [(1 - g_C^2) \operatorname{tg}^2 \theta_C + 1 - v^2] \}^{1/2}}{\operatorname{tg}^2 \theta_C + 1 - v^2}, \quad (4.25)$$

где введено обозначение  $g_C = v/v_C^*$ . Связь (4.25) двузначна, если  $g_C > 1$ , и однозначна, если  $g_C \leq 1$ . В последнем случае перед корневым слагаемым следует выбрать знак "+". Из (4.24) и (4.25) следует однозначная или двузначная связь между  $\operatorname{tg} \theta_D$  и  $\operatorname{tg} \theta_C$ . Устранить двузначность можно, если известна энергия хотя бы одной из вторичных частиц ( $C$  или  $D$ ). Мы не будем приводить явную зависимость из-за ее громоздкости. На практике проще провести численный расчет зависимости  $\theta_D$  от  $\theta_C$ .

Отметим лишь, что один кинематический параметр из четырех ( $E_C, \theta_C, E_D, \theta_D$ ) определяет с точностью до указанной двузначности все остальные кинематические параметры вторичных частиц в Л-системе, если известен импульс первичной частицы  $p_A$ , ее сорт, а также сорта частиц  $C$  и  $D$ . Это обстоятельство широко используется на практике при проектировании поисков новых двухчастичных и квазидвухчастичных процессов и при идентификации таких процессов при неполной информации о кинематических характеристиках.

#### 4.2. Дифференциальные распределения в двухчастичных упругих и квазиупругих процессах

Дифференциальное сечение по инвариантной переменной  $t(u)$ . Распределение продуктов двухчастичной реакции по кинематическим переменным определяется динамикой процесса и релятивистски инвариантным фазовым объемом. Дифференциальное сечение процесса  $A + B \rightarrow C + D$  в общем случае можно представить в следующей форме:

$$d\sigma = \sigma(s, t) \frac{d^3 p_C}{E_C} \frac{d^3 p_D}{E_D} \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D). \quad (4.26)$$

Как обычно, мы не учитываем возможных спиновых эффектов. Функция  $\sigma(s, t)$  определяется динамикой процесса, в ее определение включен также множитель, соответствующий инвариантному потоку (см. (1.35)). Вместо инвариантной переменной  $t$  часто бывает удобно использовать другую инвариантную переменную  $u$  или некоторую комбинацию функций от переменных  $(s, t)$  и  $(s, u)$ . Зависимость этих функций от  $s$  отражает энергетическое поведение сечения процесса, связанное с его динамикой.

Кинематика не претендует на количественные оценки сечений. Она описывает лишь влияние релятивистского фазового объема на распределение событий по различным кинематическим переменным. Это влияние особенно существенно, если динамические факторы являются явными функциями кинематических инвариантов. В случае двухчастичных реакций кинематические и динамические зависимости дифференциального сечения разделить довольно просто. Рассмотрим сначала вопрос о поведении релятивистского фазового объема в (4.26) в зависимости от инвариантов  $s$  и  $t(u)$ . Элемент двухчастичного фазового объема уже неоднократно рассматривался. В частности, проводя интегрирование по компонентам вектора  $p_D^*$  и энергии частицы  $C$  в Ц-системе реакции  $A + B \rightarrow C + D$ , найдем

$$\frac{d^3 p_C}{E_C} \frac{d^3 p_D}{E_D} \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) = \frac{p_C^*}{\sqrt{s}} d\Omega_C^*,$$

где  $d\Omega_C^* = d \cos \theta_C^* d\varphi_C^*$  — элемент телесного угла, куда вылетает частица  $C$  в Ц-системе;

$$p_C^* = [s - (m_C + m_D)^2]^{1/2} [s - (m_C - m_D)^2]^{1/2} / 2\sqrt{s}$$

— модуль импульса частицы  $C$  в той же системе. По азимутальному углу вылета частицы  $C$  можно проинтегрировать в пределах от 0 до  $2\pi$ . Зависимость от переменной  $t(u)$  устанавливается на основе соотношений (4.7), из которых вытекает возможность перехода от распределения по неинвариантной переменной  $\cos \theta_C^*$  к распределению по одной из инвариантных переменных  $t$  или  $u$  ( $\cos \theta_D^* = -\cos \theta_C^*$ ):

$$dt = 2p_A^* p_C^* d \cos \theta_C^*, \quad du = 2p_A^* p_D^* d \cos \theta_C^*. \quad (4.27)$$

Поэтому результаты теоретического или экспериментального изучения двухчастичных реакций можно представить в инвариантной форме:

$$d\sigma/dt = \pi \sigma(s, t) / p_A^* \sqrt{s}, \quad d\sigma/du = \pi \sigma(s, u) / p_A^* \sqrt{s}, \quad (4.28)$$

где

$$p_A^* = [s - (m_A + m_B)^2]^{1/2} [s - (m_A - m_B)^2]^{1/2} / 2\sqrt{s}.$$

Из соотношений (4.28) вытекает, что распределение по инвариантной переменной  $t$  (или  $u$ ) определяется динамикой процесса. Кинематика здесь лишь указывает пределы изменения инвариантной переменной  $t(u)$ , допускаемые законами сохранения энергии и импульса. Из соотношений (4.7) вытекает, что инвариант  $t$  максимален при  $\theta_C^* = 0$  и минимален при  $\theta_C^* = \pi$ :

$$m_A^2 + m_C^2 - 2E_A^* E_C^* - 2p_A^* p_C^* \leq t \leq m_A^2 + m_C^2 - 2E_A^* E_C^* + 2p_A^* p_C^*. \quad (4.29)$$

С учетом того, что в Ц-системе частицы  $C$  и  $D$  разлетаются под углом  $180^\circ$  ( $\theta_D^* = \pi - \theta_C^*$ ), интервал изменения инварианта  $u$  определяется неравенствами

$$m_A^2 + m_D^2 - 2E_A^* E_D^* - 2p_A^* p_D^* \leq u \leq m_A^2 + m_D^2 - 2E_A^* E_D^* + 2p_A^* p_D^*. \quad (4.30)$$

Здесь учтено, что  $p_C^* = p_D^*$ . Инвариант  $u$  достигает максимального значения при  $\theta_D^* = 0$  ( $\theta_C^* = \pi$ ), а минимального при  $\theta_D^* = \pi$  ( $\theta_C^* = 0$ ). Энергии и

модули импульсов частиц в (4.29), (4.30) выражаются через инвариант  $s$  и массы частиц (см. (4.8)).

Отметим, что в принятых в книге определениях, инварианты  $t$  и  $u$  в физической области процесса  $A + B \rightarrow C + D$  (4.29), (4.30) могут иметь любой знак. В частном случае упругого рассеяния  $A + B \rightarrow A + B$  ( $C = A$ ,  $D = B$ ) инвариант  $t$  всегда отрицателен в физической области (4.29):

$$-(2p_A^*)^2 \leq t \leq 0,$$

а инвариант  $u$  вблизи верхнего предела всегда положителен (см. (4.30)):

$$-s + 2m_A^2 + 2m_B^2 \leq u \leq (m_A^2 - m_B^2)^2/s.$$

При упругом рассеянии одинаковых частиц  $A + A \rightarrow A + A$  инварианты  $t$  и  $u$  в физической области процесса всегда отрицательны.

Отметим, что описание с помощью инварианта  $t$  удобно в тех случаях, когда в Ц-системе частицы сорта  $C$  вылетают преимущественно под небольшими углами  $\theta_C^*$ .

Инвариант  $u$  используется для описания вылета частиц сорта  $C$  под углами  $\theta_C^*$ , близкими к  $180^\circ$  ("рассеяние назад").

**Пороговое поведение сечений.** Закон  $v^{-1}$ . Заметим, что угловое распределение частиц в Ц-системе реакции  $A + B \rightarrow C + D$  также определяется динамикой процесса:

$$d\sigma/d\Omega_C^* = \sigma(s, t) p_C^*/\sqrt{s}. \quad (4.31)$$

Множитель  $p_C^*/\sqrt{s}$  здесь отражает влияние фазового объема вторичных частиц на энергетическую зависимость дифференциального и полного сечения двухчастичной реакции. В частности, этот множитель запрещает процесс  $A + B \rightarrow C + D$  при  $\sqrt{s} \leq m_C + m_D$ , если  $m_A + m_B \leq m_C + m_D$ . Такие реакции называют пороговыми процессами, а кинетическую энергию  $T_{AP}$  частицы  $A$  в Л-системе, минимально необходимую для осуществления реакции, называют пороговой энергией реакции:

$$T_{AP} = (E_A - m_A)_P = [(m_C + m_D)^2 - (m_A + m_B)^2]/2m_B.$$

Если  $(m_A + m_B) \geq (m_C + m_D)$ , то процесс идет с выделением энергии и осуществляется даже при покоящейся в Л-системе частице  $A$ .

В определение функции  $\sigma(s, t)$ , кроме квадрата модуля инвариантной амплитуды процесса  $|M|^2$ , включен множитель отвечающий инвариантно-му потоку первичных частиц  $s$  (см. (1.35)):

$$\sigma(s, t) = \rho(s, t)/j, \quad j = [(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2]^{1/2}.$$

Инвариант  $j$  можно выразить через кинематические переменные Ц-системы:

$$j = \sqrt{s} p_A^* = \frac{1}{2} [s - (m_A + m_B)^2]^{1/2} [s - (m_A - m_B)^2]^{1/2} = m_B p_A.$$

Тогда дифференциальное сечение (4.31) запишется в форме

$$d\sigma/d\Omega_C^* = \rho(s, t) p_C^*/s p_A^*. \quad (4.32)$$

Для реакций, сопровождающихся энерговыделением  $m_A + m_B > m_C + m_D$ , на основе (4.32) можно установить характер энергетического поведения дифференциального сечения в нерелятивистском случае для пер-

вичных частиц, когда  $(\sqrt{s} - m_A - m_B) \ll (m_A + m_B)$ . В этих условиях в соотношении (4.32) резко изменяется множитель  $p_A^* \approx [2m_A m_B (\sqrt{s} - m_A - m_B)/(m_A + m_B)]^{1/2}$ . Остальные множители и инвариантные переменные в нерелятивистском пределе изменяются медленно с энергией. Поэтому энергетическое поведение дифференциального сечения (4.32) и полного сечения реакции  $A + B \rightarrow C + D$  в этом случае имеет вид

$$d\sigma/d\Omega_C^* = (p_A^*)^{-1} f(\cos \theta_C^*), \quad \sigma = (p_A^*)^{-1} \int f(\cos \theta_C^*) d\Omega_C^*. \quad (4.33)$$

Поскольку в нерелятивистском пределе  $p_A^*/m_A = v_A^* = v_A (1 + m_A/m_B)^{-1}$ , где  $v_A^*$ ,  $v_A$  — скорость частицы  $A$  в Ц-системе и Л-системе реакции соответственно, то зависимости (4.33) выражают известный закон  $v^{-1}$  поведения сечений ядерных реакций, идущих с энерговыделением, в области малых скоростей первичных частиц:

$$\sigma(A + B \rightarrow C + D) \sim (v_A^*)^{-1} \sim v_A^{-1}. \quad (4.34)$$

Предсказания порогового энергетического поведения (4.31) и закона  $v^{-1}$  (4.34) для сечений реакций  $A + B \rightarrow C + D$ , идущих с энерговыделением в нерелятивистском пределе, можно отнести к кинематическим закономерностям, так как они не используют сведений о динамике процесса.

**Энергетические и угловые распределения в Л-системе.** Дифференциальные сечения по инвариантным переменным  $t$  и  $u$  (4.28) с помощью соотношений (4.5) превращаются в распределения по полным или кинетическим энергиям вторичных частиц в Л-системе:

$$d\sigma/dt = (2m_B)^{-1} d\sigma/dT_D, \quad d\sigma/du = (2m_B)^{-1} d\sigma/dT_C, \quad (4.35)$$

где  $T_D = E_D - m_D$ ,  $T_C = E_C - m_C$  — кинетические энергии частиц  $D$  и  $C$ . Согласно закону сохранения энергии величины  $E_D$  и  $E_C$  ( $T_D$  и  $T_C$ ) линейно связаны друг с другом:  $E_C = E_A + m_B - E_D$  или  $T_C = E_A + m_B - m_C - m_D - T_D$ . Поэтому распределения (4.35) по  $T_C$  или  $T_D$  имеют следующую форму:

$$d\sigma/dT_C = 2\pi\sigma(s, u)/p_A, \quad d\sigma/dT_D = 2\pi\sigma(s, t)/p_A. \quad (4.36)$$

Пределы изменения кинетических энергий в Л-системе находятся согласно формуле (4.22):

$$\frac{E_C^*(E_A + m_B) - p_C^* p_A}{\sqrt{s}} - m_C \leq T_C \leq \frac{E_C^*(E_A + m_B) + p_C^* p_A}{\sqrt{s}} - m_C.$$

Пределы изменения  $T_D$  получаются с помощью замены индекса  $C$  в приведенных выше неравенствах на индекс  $D$ .

Пересчет дифференциальных сечений по инвариантным переменным  $t$  или  $u$  в дифференциальные сечения по углам вылета вторичных частиц в Л-системе, производится на основе соотношений (4.36), (4.12) и (4.15). Угловое распределение частиц сорта  $D$  получается из формул для углового распределения частиц сорта  $C$  заменой индекса  $C$  на индекс  $D$ . При такой операции, однако, следует проверить, является ли связь между энергией  $E_D$  и углом вылета двузначной или однозначной. Рассмотрим более сложный случай двузначной связи (4.15) ( $v \geq v_C^*$ ).

Переход от распределения по  $T_C$  (или  $E_C$ ) к распределению по  $\cos \theta_C$  совершается с помощью следующего преобразования:

$$dE_C^{(1,2)} = dT_C^{(1,2)} = p_A (p_C^{(1,2)})^2 [(p_C^*)^2 s - m_C^2 p_A^2 \sin^2 \theta_C]^{-1/2} d \cos \theta_C, \quad (4.37)$$

где  $p_C^{(1,2)}$  — импульс частицы  $C$ , выраженный через  $\cos \theta_C$  по формуле (4.9). Распределение по  $\cos \theta_C$ , согласно (4.36) и (4.37), имеет следующий вид:

$$d\sigma/d \cos \theta_C = 2\pi [s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2 \theta_C]^{-1/2} \times \\ \times [\sigma(s, u^{(1)})(p_C^{(1)})^2 + \sigma(s, u^{(2)})(p_C^{(2)})^2]. \quad (4.38)$$

Здесь  $u^{(1,2)}$  — значение инварианта  $u$ , вычисленного по формуле (4.5), в которую подставлено значение  $E_C$ , равное  $E_C^{(1,2)}$ . Если инвариантная функция задана в виде  $\sigma(s, t)$ , то инвариант  $t^{(1,2)}$  удобно записать в форме  $t^{(1,2)} = m_A^2 + m_B^2 + m_D^2 - s - u^{(1,2)}$ . Если связь между  $E_C$  и  $\theta_C$  однозначна ( $v \leq v_C^*$ ), то в формуле (4.38) в квадратных скобках следует оставить только первое слагаемое.

При двузначной связи  $E_C$  с  $\theta_C$  существует максимальный возможный угол вылета вторичной частицы (см. (4.14)). При этом значении угла вылета дифференциальное сечение (4.38) стремится к бесконечности. Эта бесконечность интегрируема и превращается в максимум распределения событий вблизи максимального возможного значения угла вылета при учете экспериментального углового разрешения. Наблюдение такого максимума в угловом распределении позволяет приближенно оценить массу частицы  $C$  и установить, следовательно, ее сорт.

Если по каким-то причинам невозможен пересчет кинематики событий в Ц-систему (например, не измеряется импульс частицы  $C$ ), то анализ динамики процесса можно провести прямо в Л-системе, изучая экспериментальное распределение событий по  $\cos \theta_C$  в форме  $[s(p_C^*)^2 - m_C^2 p_A^2 \sin^2 \theta_C]^{1/2} d\sigma/d \cos \theta_C$ , исключая кинематическую особенность вблизи максимального угла вылета (4.14).

### 4.3. Примеры применения кинематики двухчастичных процессов

В данном разделе для иллюстрации приводятся несколько примеров кинематического анализа двухчастичных процессов, который помогает оптимальным образом спроектировать поиски различных редких процессов и провести их идентификацию. Возможности кинематики не исчерпываются приведенными ниже примерами, выбор которых связан с определенными важными проблемами физики частиц, изучавшимися теоретически и экспериментально в последние годы.

Квазиупругое нейтринорождение очарованных барионов и тяжелых лептонов. Процесс образования очарованных барионов в реакциях квазиупругого типа



вызывает значительный физический интерес по крайней мере по двум при-

чинам. Во-первых, изучение дифференциального распределения событий по квадрату переданного 4-импульса  $t = (p_\nu - p_\mu)^2$  ( $p_{\nu,\mu}$  — 4-импульс нейтрино, мюона) позволит исследовать формфакторы слабого перехода нейтрона в очарованный барион и сравнить его с формфактором слабого перехода нейтрона в протон, поведение которых по переменной  $t$  уже изучено экспериментально. Во-вторых, сравнение данных о процессе (4.39) и обычной нейтринной реакции  $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$  позволяет получить сведения о степени и характере нарушения симметрии  $SU(4)$  между очарованными и обычными барионами [21]. Кроме того, каналы распада очарованного бариона  $\Lambda_c^+$ , изученные пока недостаточно полно, представляют большой интерес для физики слабых взаимодействий. Канал (4.39) является не единственным квазиупругим каналом нейтринорождения очарованных барионов. Возможны также реакции



и каналы с образованием очарованных барионных резонансов.

Не вдаваясь в детали, поясним, что очарованные барионы  $\Lambda_c^+$ ,  $\Sigma_c^+$ ,  $\Sigma_c^{++}$  отличаются от странных барионов (гиперонов)  $\Lambda$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^+$  тем, что в их структуре странный кварк  $s$  заменен на очарованный кварк  $c$ . Масса очарованного бариона  $\Lambda_c^+$  составляет  $m(\Lambda_c^+) \approx 2,28$  ГэВ [10]; остальные очарованные барионы более тяжелые.

В эксперименте по изучению процессов нейтринообразования очарованных частиц на серпуховском нейтринном канале [22] предполагается детектировать реакцию (4.39) в фотоэмульсии. Поиск событий в фотоэмульсии представляет собой весьма трудоемкую задачу. Поэтому любые ограничения, накладываемые кинематикой на характеристики продуктов реакции (4.39) делают поиск более целенаправленным и эффективным.

Важным указанием угловых пределов для поисков реакции (4.39) является существование в этом процессе предельного угла вылета  $\Lambda_c^+$ -бариона. Согласно (4.14) углы вылета в Л-системе ограничены сверху значением

$$\theta_{\max} = \arcsin(\sqrt{s} p^*/E_\nu M_c), \quad (4.40)$$

где  $E_\nu$  — энергия налетающего нейтрино,  $s = M^2 + 2ME_\nu$ ,  $M$  — масса нуклона,  $M_c$  — масса  $\Lambda_c^+$ -бариона,

$$p^* = [s - (M_c + \mu)^2]^{1/2} [s - (M_c - \mu)^2]^{1/2} / 2\sqrt{s} \approx (s - M_c^2)^{1/2} / \sqrt{s}$$

— импульс  $\Lambda_c^+$ -бариона в Ц-системе реакции (4.39),  $\mu$  — масса мюона, которой можно пренебречь (относительная погрешность этого приближения  $\mu^2/M_c^2 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ ). Рассмотрим зависимость  $\sin \theta_{\max}$  от энергии нейтрино:

$$\sin \theta_{\max} = [2ME_\nu - (M_c^2 - M^2)] / 2M_c E_\nu. \quad (4.41)$$

Формула (4.41) показывает, что с ростом энергии нейтрино максимальный угол вылета  $\Lambda_c^+$ -гиперона растет и в пределе  $E_\nu \rightarrow \infty$  достигает постоянного значения

$$\theta_{\max}(E_\nu \rightarrow \infty) = \arcsin(M/M_c) \approx 24^\circ.$$

В области энергий нейтринного канала серпуховского ускорителя ожидается, что реакция (4.39) будет давать заметный относительный вклад в



выход очарованных барионов на фоне других процессов при энергиях нейтрино  $E_\nu \lesssim (10-15)$  ГэВ [22]. Поэтому значение  $\theta_{\max}$  оказывается несколько меньше асимптотического значения и составляет около  $20^\circ$ . Среднее значение угла вылета  $\Lambda_c^+$  в условиях эксперимента [22] оказывается около  $13^\circ$ . О динамике процесса (4.39) известно из теоретического анализа этой реакции в рамках современных представлений о механизмах слабого взаимодействия. Дифференциальное сечение этой реакции  $da/dt$  должно убывать с ростом по модулю инвариантной переменной  $|t|$  (см., например, [21, 23]).

Интересно установить: скажется ли этот динамический эффект на предсказываемое кинематикой преобладание выхода барионов, вылетающих под углами, близкими к максимальному (см. формулу (4.38)).

Детальные расчеты [23] показывают, что динамика процесса не подавляет указанный кинематический эффект. Максимально возможному углу вылета  $\Lambda_c^+$ -бариона в Л-системе отвечает значение его энергии  $E$ , равное (см. (4.14), (4.15))

$$E(\theta_{\max}) = \frac{(E_\nu + M) M_c^2}{\sqrt{s} E^*} \approx \frac{M_c^2 (s + M^2)}{M(s + M_c^2)}$$

и, соответственно, модуль инварианта  $t$  (см. (4.5))

$$|t| = 2ME(\theta_{\max}) - M^2 - M_c^2. \quad (4.42)$$

Здесь  $E^* = (s + M_c^2 - \mu^2)/2\sqrt{s}$  — энергия  $\Lambda_c^+$ -бариона в Ц-системе реакции (4.39). Массой мюона  $\mu$  при проведении оценок пренебрегается. Эффективные значения переменной  $|t|$ , определяющие основной вклад в сечение процесса (4.39), ограничены неравенством  $|t| \lesssim M_V^2, M_A^2$ , где  $M_{V,A} = 2,0 (2,4)$  ГэВ — масса векторного (аксиально-векторного) очарованного мезона, взаимодействие с которым обеспечивает переход  $n \rightarrow \Lambda_c^+$  (см., например, [21, 23]). Нетрудно заключить, что значение  $|t|$ , отвечающее максимальному углу вылета  $\Lambda_c^+$  (4.42), находится в указанной выше области эффективных значений. Следовательно, эффект кинематической особенности в угловом распределении (4.38) при  $\theta = \theta_{\max}$  сохраняется. В работе [23] рассмотрен также случай, когда динамика процесса ограничена условием  $|t_{\phi}| \lesssim M^2$ . В этом случае, хотя эффект кинематической особенности в угловом распределении формально имеет место, фактически его вклад в сечение сильно подавляется. Таким образом, наблюдение на опыте концентрации событий вблизи угла  $\theta = \theta_{\max}$  или отсутствие таковой позволяют сделать выводы о динамике процесса.

Интересное заключение можно сделать также относительно поиска процессов образования тяжелых заряженных и нейтральных лептонов с мюонным квантовым числом в квазиупругих реакциях вида [24]

$$\nu_\mu + n \rightarrow M^- + p, \quad \nu_\mu + N \rightarrow M^0 + N. \quad (4.43)$$

В этих процессах угол вылета тяжелого лептона  $M^0$  в Л-системе также ограничен сверху:

$$\theta_{\max} = \arcsin(\sqrt{s} p^*/mE_\nu).$$

Здесь  $p^*$  — импульс тяжелого лептона в Ц-системе реакции (4.43),  $m$  — его масса,  $s = M^2 + 2ME_\nu$ ,  $M$  — масса нуклона,  $E_\nu$  — энергия нейтрино в Л-системе.

ме. При максимальном угле вылета энергия тяжелого лептона составляет

$$E(\theta_{\max}) = m^2 E_N^*/ME^*,$$

где  $E_N^* = (s + M^2)/2\sqrt{s}$  — энергия первичного нуклона,  $E^*$  — энергия тяжелого лептона в Ц-системе реакции ( $E^* = (s + m^2 - M^2)/2\sqrt{s}$ ). Динамика процессов (4.43) такова [24], что с ростом инварианта  $|t|$  их дифференциальное сечение  $da/d|t|$  резко падает. Эффективные значения  $|t|$  ограничены сверху неравенством  $|t| \lesssim M^2$ .

Вылету тяжелого лептона под углом  $\theta_{\max}$  в Л-системе отвечает значение инварианта

$$|t(\theta_{\max})| = s + u(\theta_{\max}) - m^2 - 2M^2 = \\ = s - M^2 - 2m^2(s + M^2)/(s + m^2 - M^2).$$

Тогда значение  $|t(\theta_{\max})|$  превышает эффективную величину  $|t| \approx M^2$  при любых энергиях нейтрино, больших порога реакции. Это означает, что кинематическая корневая особенность в угловом распределении тяжелых лептонов (4.38) будет подавлена динамическим фактором  $\sigma(s, t)$  и практически не проявится на опыте. Угловое распределение тяжелых лептонов будет, в основном, определяться фактором

$$[(E_\nu + M)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta]^{-2} = [s + E_\nu^2 \sin^2 \theta]^{-2},$$

входящим в кинематические множители  $(p_c^{(1,2)})^2$ , фигурирующие в формуле (4.38), и факторами  $\sigma(s, t^{(1,2)})$ , зависящими от динамики процесса. Эти факторы делают угловое распределение тяжелых лептонов сильно вытянутым в направлении пучка налетающих нейтрино [24].

Рассмотренные простые примеры демонстрируют, как с помощью кинематики и довольно общих динамических соображений можно составить представление о топологии событий, подлежащих идентификации и исследованию.

Кинематика процессов образования пар нестабильных частиц в реакции  $e^+ e^-$ -аннигиляции и их последующего распада. Процессы  $e^+ e^-$ -аннигиляции давно стали экспериментальной и теоретической лабораторией для поисков и исследования новых тяжелых частиц — адронов и лептонов. Тяжелые  $\tau^\pm$ -лептоны, например, были открыты при исследовании реакции

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^\pm + e^\pm + \text{недостающая энергия}. \quad (4.44)$$

Тщательный кинематический анализ показал, что реакция (4.44) должна трактоваться как процесс образования пары тяжелых лептонов  $\tau^+, \tau^-$  с массами  $m_\tau \approx 1,78$  ГэВ в реакции

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^- \quad (4.45)$$

с последующими распадами  $\tau^\pm$  по чисто лептонным каналам:

$$\tau^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau), \quad \tau^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau). \quad (4.46)$$

Впоследствии были открыты каналы распадов  $\tau^\pm$  с образованием адронов в конечном состоянии. Реакция (4.45) осуществляется за счет электромагнитного взаимодействия посредством превращения  $e^+ e^-$ -пары в виртуальный фотон с эффективной массой  $\sqrt{s} \geq 2m_\tau$ , который на конечной

стадии процесса превращается в  $\tau^+ \tau^-$ -пару.  $\tau^\pm$ -лептоны в собственной системе покоя живут очень мало (приблизительно  $3,5 \cdot 10^{-13}$  с). Из-за малого времени жизни  $\tau^\pm$ -лептонов наблюдаются продукты их распада, а не сами  $\tau$ -лептоны. Если они распадаются по каналам (4.46), то в конечном состоянии наблюдаются пары  $\mu^+ \mu^-$ ,  $e^+ e^-$ ,  $\mu^+ e^-$ ,  $\mu^- e^+$ , кинематические характеристики которых могут быть установлены экспериментально. Однако значительная доля первичной энергии уносится при этом недетектируемыми нейтрино, образующимися в распадах (4.46). В таких условиях идентификация процесса (4.45), а следовательно, и обнаружение лептонов нового типа вынуждены опираться на теоретические предсказания, основанные на динамических расчетах энергетических спектров наблюдаемых лептонов (мюонов, электронов), и сравнение этих предсказаний с экспериментальными данными. При проведении таких расчетов приходится решать и кинематические проблемы, связанные с пределами изменения кинематических характеристик, наблюдаемых и промежуточных частиц в зависимости от первичной энергии  $e^+ e^-$ -соударения и масс частиц, участвующих в процессе взаимодействия на разных его стадиях. Оставляя в стороне динамическую часть задачи (см., например, [25]), рассмотрим кинематику процесса (4.45) с последующим распадом одного из  $\tau^\pm$ -лептонов по чисто лептонному каналу (4.46) с целью продемонстрировать методику проведения кинематического анализа на конкретном примере, имеющем практическое значение.

В Ц-системе реакции (4.45) энергия каждого  $\tau^\pm$ -лептона  $E_{1,2} = \sqrt{s}/2$ , где  $\sqrt{s}$  — суммарная энергия сталкивающихся электрона и позитрона. В этой системе отсчета  $\tau$ -лептоны вылетают под углом  $180^\circ$  друг к другу, а полярный угол вылета  $\theta$  одного из них по отношению к оси  $e^+ e^-$ -соударения может принимать любые значения в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Соответственно, азимутальный угол вылета  $\tau$ -лептона  $\varphi$  может изменяться в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В данной задаче нас интересуют кинематические характеристики одного из наблюдаемых лептонов,  $e^\pm$  или  $\mu^\pm$ , образующихся при распаде  $\tau^\pm$ -лептона на легу по одному из каналов (4.46). Поскольку трек  $\tau$ -лептона не наблюдается, а вторичные нейтрино в распадах (4.46) не регистрируются, перейти в систему покоя  $\tau$  не представляется возможным. Поэтому процессы (4.45) и (4.46) приходится рассматривать совместно в Ц-системе реакции (4.45), которая близка к системе встречных пучков, где проводятся лабораторные наблюдения. Чтобы учесть все возможные чисто кинематические корреляции между кинематическими характеристиками частиц, участвующих в каскаде процессов (4.45), (4.46), удобно выписать выражение для релятивистского фазового объема вторичных частиц с раздельным учетом законов сохранения энергии и импульса в реакции аннигиляции (4.45) и распада (4.46):

$$dF \sim \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \frac{d^3 k}{\omega} \frac{d^3 k_1}{\omega_1} \frac{d^3 k_2}{\omega_2} \times \\ \times \delta^{(4)}(p_1 - k - k_1 - k_2) dp_1^2 \delta(p_1^2 - m_\tau^2). \quad (4.47)$$

В формуле (4.47)  $p_1$ ,  $p_2$  — 4-импульсы  $\tau^+$ - и  $\tau^-$ -лептонов,  $E_{1,2}$  — их энергии,  $q$  — суммарный 4-импульс пары  $e^+ e^-$  (в Ц-системе реакции  $q_0 = \sqrt{s}$ ,

$q = 0$ );  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — 4-импульсы заряженного лептона ( $\mu$  или  $e$ ) и двух нейтрино в распаде (4.46),  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — энергии этих частиц. В фазовом объеме (4.47) учтены с помощью двух  $\delta^{(4)}$ -функций законы сохранения энергии и импульса в реакции (4.45) и в распаде (4.46). Рассматривается распад только одного из  $\tau$ -лептонов с 4-импульсом  $p_1$ . Второй  $\tau$ -лептон из-за нестабильности обязательно распадется по любому из возможных каналов. Кинематикой продуктов этого распада мы здесь не интересуемся. Поэтому учтем лишь фазовый объем этого  $\tau$ -лептона. Входящая в правую часть соотношения (4.47) функция  $\delta(p_1^2 - m_\tau^2)$  фиксирует массу того  $\tau$ -лептона, продукты распада которого по каналу (4.46) содержат детектируемый лептон ( $\mu$  или  $e$ ) с интересующими нас характеристиками. Для установления допустимых границ изменения энергии и угла вылета этого заряженного лептона нужно проинтегрировать в (4.47) по фазовым объемам всех вторичных частиц, кроме данного лептона, с учетом законов сохранения энергии и импульса в реакции образования  $\tau^+ \tau^-$ -пары и распаде одного из  $\tau$ -лептонов. Условие  $p_1^2 = m_\tau^2$  нужно иметь в виду после проведения интегрирования по квадрату инварианта  $p_1^2$  в (4.47) с помощью функции  $\delta(p_1^2 - m_\tau^2)$ . Это условие вследствие законов сохранения энергии и импульса приобретает вид

$$(k + k_1 + k_2)^2 = m_\tau^2. \quad (4.48)$$

Интегрирование по фазовому объему двух нейтрино удобно провести в системе их центра инерции, где их импульсы удовлетворяют условию  $k'_1 + k'_2 = 0$ .

В этой системе отсчета с помощью  $\delta^{(4)}$ -функций вычисляются интегралы по всем трем компонентам импульса одного из нейтрино и по энергии другого. Оставшийся интеграл по телесному углу вылета второго нейтрино вычисляется в геометрических пределах. Результат интегрирования по фазовому объему двух нейтрино зависит в общем случае от квадрата их эффективной массы:

$$s_{12} = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 - k)^2, \quad (4.49)$$

и от масс нейтрино, если они отличны от нуля. Этот вывод справедлив и в том случае, когда учитывается динамика распада. Пределы изменения инварианта (4.49) при любых допустимых значениях компонент 4-импульса  $k$  устанавливаются неравенствами

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (m_\tau - m)^2, \quad (4.50)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  — массы нейтрино,  $m$  — масса заряженного лептона. При фиксированном значении импульса наблюдаемого заряженного лептона ( $\mu$  или  $e$ ) условия (4.50) определяют границы изменения кинематических характеристик  $\tau$ -лептона с 4-импульсом  $p_1$ , в распаде которого по схеме (4.46) образуется детектирующий обычный лептон:

$$(m_1 + m_2)^2 \leq (p_1 - k)^2 \leq (m_\tau - m)^2. \quad (4.51)$$

Ограничения (4.51), вытекающие из очевидных неравенств (4.50), влияют на пределы интегрирования по фазовому объему  $\tau^+$ - и  $\tau^-$ -лептонов в (4.47). Это интегрирование с учетом ограничений (4.51) удобно выполнить в Ц-системе реакции (4.45), где  $p_1 + p_2 = 0$ ,  $E_1 = E_2 = \sqrt{s}/2 = E$ .

С помощью  $\delta^{(4)}$ -функции с аргументом  $(q - p_1 - p_2)$  выполняется интегрирование по трем компонентам импульса  $p_2$  и по энергии  $E_1$ . Оставшееся интегрирование по телесному углу вылета  $\tau$ -лептона  $d\Omega_1$ , продукт распада которого ( $\mu$  или  $e$ ) наблюдается экспериментально, можно выполнить в геометрических пределах только по азимутальному углу  $\varphi_1$  ( $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ ), если ось  $z$  декартовой системы координат направить вдоль фиксированного вектора  $k$ . Полярный угол  $\theta_1$  вектора  $p_1$  при этом определяется как угол между направлениями векторов  $p_1$  и  $k$ . Пределы изменения этого угла не обязательно геометрические, поскольку этот угол определяет значение инварианта (4.49), ограниченного неравенствами (4.51):

$$s_{12} = (p_1 - k)^2 = m_\tau^2 + m_2^2 - 2E_1\omega + 2p_1k \cos \theta_1. \quad (4.52)$$

Правое из неравенств (4.51) приводит к следующему ограничению:

$$\cos \theta_1 < (E_1\omega - m_\tau m_2)/p_1k,$$

которое всегда выполняется. Это означает, что  $\cos \theta_1$  ограничен сверху геометрическим пределом:  $\cos \theta_1 \leq 1$ .

Левое из неравенств (4.51) ограничивает значения  $\cos \theta_1$  снизу:

$$(E_1\omega - m_\tau\omega^*)/p_1k \leq \cos \theta_1, \quad (4.53)$$

где  $\omega^* = [m_\tau^2 + m^2 - (m_1 + m_2)^2]/2m_\tau$  — максимальная возможная энергия детектируемого заряженного лептона в системе покоя  $\tau$ -лептона. Реально неравенство (4.53) следует заменить на следующие неравенства:

$$-1 \leq (E_1\omega - m_\tau\omega^*)/p_1k \leq 1. \quad (4.54)$$

При выполнении условий (4.54),  $\cos \theta_1$  изменяется в следующих пределах:

$$(E_1\omega - m_\tau\omega^*)/p_1k \leq \cos \theta_1 \leq 1. \quad (4.55)$$

Если же выполнено условие

$$(E_1\omega - m_\tau\omega^*)/p_1k \leq -1, \quad (4.56)$$

то ограничение (4.53) не имеет физического смысла, а  $\cos \theta_1$  изменяется в геометрических пределах:

$$-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1. \quad (4.57)$$

Неравенства (4.54) и (4.56) накладывают ограничения на область изменения энергии (импульса) детектируемого лептона ( $e$  или  $\mu$ ). Рассмотрим сначала неравенства (4.54), которые можно переписать в форме

$$|E_1\omega - m_\tau\omega^*| \leq p_1k. \quad (4.58)$$

Напомним, что значения  $E_1 = \sqrt{s}/2$ ,  $p_1 = [E_1^2 - m_\tau^2]^{1/2}$  считаются известными. Неравенства (4.54), (4.58) можно разрешить относительно энергии детектируемого лептона:

$$(E_1\omega^* - p_1k^*)/m_\tau \leq \omega \leq (E_1\omega^* + p_1k^*)/m_\tau. \quad (4.59)$$

Соответствующая область изменения импульса детектируемого лептона определяется неравенствами

$$|p_1\omega^* - E_1k^*|/m_\tau \leq k \leq (p_1\omega^* + E_1k^*)/m_\tau. \quad (4.60)$$

Рассмотрим теперь неравенства (4.56), при выполнении которого интегрирование по  $\theta_1$  следует выполнять в пределах (4.57). Это неравенство

разрешается относительно импульса детектируемого лептона:

$$0 \leq k \leq (E_1k^* - p_1\omega^*)/m_\tau. \quad (4.61)$$

Из неравенства (4.56) вытекает отрицательный нижний предел на значения  $k$ . Поскольку модуль импульса  $k$  положительно определен ( $|k| = k$ ), то нижний предел в (4.61) равен нулю. Неравенства (4.61) непротиворечивы, если верхний предел положительный:  $E_1k^* - p_1\omega^* \geq 0$  или  $v^* \geq v_1$ . Следовательно, в тех случаях, когда скорость детектируемого лептона ( $\mu$  или  $e$ ) в системе покоя  $\tau$  превышает скорость последнего в Ц-системе реакции (4.45), кроме области изменения импульса  $k$  (4.60) существует еще одна область (4.61). Интервал изменения энергии детектируемого лептона, соответствующий неравенствам (4.61), есть

$$m \leq \omega \leq (E_1\omega^* - p_1k^*)/m_\tau. \quad (4.62)$$

Область (4.62) непосредственно примыкает к области (4.59), а область (4.61) — к области (4.60).

Следовательно, при  $v^* \geq v_1$  область изменения энергии  $\omega$  или импульса  $k$  заключена в интервалах

$$m \leq \omega \leq (E_1\omega^* + p_1k^*)/m_\tau, \quad 0 \leq k \leq (p_1\omega^* + E_1k^*)/m_\tau. \quad (4.63)$$

Если  $v^* \leq v_1$ , то пределы изменения  $\omega$  или  $k$  определяются неравенствами (4.59), (4.60). Отметим, что интегрирование по ненаблюдаемому на опыте углу между векторами  $p_1$  и  $k_1$  проводится в различных пределах (4.55) или (4.57) в зависимости от того в каком интервале (4.59) или (4.62) заключена энергия  $\omega$  лептона. Это приводит к тому, что распределение событий по энергии  $\omega$  (или по импульсу  $k$ ) описывается различными формулами даже в рамках статистической гипотезы. Тем более это обстоятельство существенно, разумеется, и при проведении динамических расчетов, на основе которых делаются заключения о существовании  $\tau$ -лептонов. Энергия  $\tau$ -лептона  $E_1$  в Ц-системе реакции (4.45) совпадает с энергией  $E$  частиц одного из первичных пучков ( $e^+$  или  $e^-$ ). Поэтому неравенство типа  $v^* \geq v_1$  можно представить в виде неравенства для энергии одного из сталкивающихся пучков:  $E \leq m_\tau\omega^*/m$ .

Если энергия  $E$  заключена в пределах

$$m_\tau \leq E \leq [m_\tau^2 + m^2 - (m_1 + m_2)^2]/2m, \quad (4.64)$$

то энергия наблюдаемого лептона ( $\mu$  или  $e$ ) изменяется в пределах (4.63). Если же энергия  $E$  превышает значение  $m_\tau\omega^*/m$ , то  $\omega$  изменяется в пределах (4.59). Очевидно, что в случае распада  $\tau$ -лептона по каналу (4.46) с участием электрона (позитрона) правое неравенство (4.64) выполняется вплоть до очень высоких энергий  $E \approx 10^3 m_\tau^2$  (масса  $m_\tau$  и энергия  $E$  выражены в гигаэлектронвольтах). В случае наблюдаемых мюонов правое неравенство выполняется вплоть до энергий  $e^+$ -пучков  $E \approx 5m_\tau^2 \approx 16$  ГэВ, которые уже достигнуты и даже превзойдены на действующих установках со встречными  $e^+e^-$ -пучками.

Сделаем еще одно важное замечание. Кинематика не накладывает никаких ограничений на угол вылета  $\theta$  детектируемого лептона ( $\mu$  или  $e$ ) по отношению к направлению оси сталкивающихся встречных  $e^+$ -пучков. Это означает, что угол  $\theta$  может изменяться в геометрических пределах:  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Такой вывод имеет и практическое значение: для детектирова-

## КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ АДРОНОВ

ния заряженных  $e^\pm$ ,  $\mu^\pm$ -лептонов от распадов  $\tau^\pm$ -лептонов (4.46), образованных в реакции (4.45), выгодно создавать широкоапертурные установки, обеспечивающие более быстрый набор статистики для изучения не только энергетических спектров лептонов, но и их угловых распределений.

Рассмотрим еще один важный случай распада  $\tau$ -лептона, образованного в реакции (4.45), по двухчастичному каналу

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau). \quad (4.65)$$

Кинематика каскада процессов (4.45) и (4.65) отличается исключительной простотой ввиду двухчастичного характера этих процессов. Более того, детерминированность энергии  $\tau$ -лептона в Ц-системе реакции (4.45) обеспечивает ступенчатый характер энергетического спектра пионов от распада (4.65), независимо от динамики образования  $\tau$ -лептона [26]. По этому признаку и был обнаружен канал распада (4.65).

При заданной энергии  $\tau$ -лептона пределы изменения энергии  $\omega$  пионов в распаде (4.65) на лету (см. (2.20), (2.21))

$$(E_1 \omega^* - p_1 k^*)/m_\tau \leq \omega \leq (E_1 \omega^* + p_1 k^*)/m_\tau, \quad (4.66)$$

где  $E_1$ ,  $p_1$  — энергия и импульс  $\tau$ -лептона,  $\omega^* = (m_\tau^2 + m_\pi^2 - m_\nu^2)/2m_\tau$  — энергия пиона в системе покоя  $\tau$ ,  $k^* = [(\omega^*)^2 - m_\pi^2]^{1/2}$ ,  $m_\pi$  — масса пиона,  $m_\nu$  — масса  $\tau$ -нейтрино. Если импульсно-угловое распределение пионов  $d\sigma/d\omega d\Omega_\pi$  проинтегрировать по углам вылета пионов, то их энергетический спектр  $d\sigma/d\omega$  будет, как отмечалось, иметь ступенчатый вид в интервале энергий (4.66). Следует отметить, что пионы от распада (4.65) оказываются вблизи верхнего предела (4.66) наиболее быстрыми по сравнению с пионами от других распадов  $\tau$ -лептонов с участием адронов (а также от распадов очарованных мезонов с той же энергией). Кроме того, спектры  $\pi^\pm$  от других распадов  $\tau$ -лептонов круто падают с ростом энергии  $\omega$ . Поэтому ступенчатый характер спектра энергий пионов от распада (4.65) — отличительный признак этого распада [26]. Интересно, что в данном случае от динамики процесса образования  $\tau$ -лептона (4.45) зависит угловое распределение вторичных пионов от распада (4.65) в Ц-системе реакции  $e^+e^-$ -аннигиляции. Углы вылета пионов по отношению к оси соударения  $e^+$ - и  $e^-$ -пучков изменяются в геометрических пределах (см. [26]).

В литературе можно найти примеры анализа более сложных кинематических ситуаций, например, каскада процессов [26]

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-, \quad \tau^+ \rightarrow \rho^+ + \bar{\nu}_\tau, \quad \rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

или [27]

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-, \quad \tau^+ \rightarrow A_1^+ + \bar{\nu}_\tau, \quad A_1^+ \rightarrow \rho^0 + \pi^+,$$

с которыми читателю полезно ознакомиться самостоятельно.

В заключение этой главы заметим, что умение устанавливать правильные кинематические ограничения на интервалы изменения различных кинематических характеристик вторичных частиц даже в простейших случаях, когда число частиц не превышает двух-трех, необходимо даже в тех случаях, когда известна динамика процесса. Динамика проявляется в рамках строгих кинематических ограничений, которые сами по себе заставляют весьма существенны и указывают возможные пути поиска новых частиц и процессов.

### 5.1. Инклюзивный метод описания и исследования множественных процессов

Для процессов сильного взаимодействия адронов при высоких энергиях характерно большое число каналов с высокой средней множественностью вторичных частиц, которая растет с увеличением энергии соударения (см., например, [17, 18]). В физике частиц низких энергий принят метод эксклюзивного теоретического описания и экспериментального исследования каждого отдельного канала процесса взаимодействия двух частиц  $a$  и  $b$  с образованием нескольких вторичных частиц

$$a + b \rightarrow c + d + \dots + f. \quad (5.1)$$

Если число вторичных частиц в реакции (5.1) невелико и все их кинематические характеристики измеряются на опыте, то такой метод исследования и сам процесс называются эксклюзивными.

С ростом энергии в процессах сильного взаимодействия открывается все большее число различных каналов (видов) реакций типа (5.1); растет среднее число вторичных частиц, образуются частицы самых разнообразных сортов, в том числе, и отличных от первичных. При этом в каждом канале (5.1) выполняются все законы сохранения, характерные для данного типа взаимодействия\*): 1) сохранение энергии и импульса; 2) сохранение электрического заряда; 3) сохранение барионного заряда; 4) сохранение изотопического спина, странности, очарования в процессах сильного взаимодействия и др. При большом количестве вторичных частиц и большом разнообразии каналов реакций взаимодействия в области высоких энергий эксклюзивное исследование становится исключительно сложным и практически неосуществимым.

Тем не менее довольно ценную информацию о механизмах и свойствах процессов множественного образования адронов, а также о кинематических характеристиках вторичных адронов различных сортов можно получить, изучая не отдельные многочисленные эксклюзивные процессы типа (5.1), а совокупности процессов

$$a + b \rightarrow c + X, \quad (5.2)$$

в которых детектируется только одна частица сорта  $c$ , а сопровождающая ее произвольная совокупность частиц  $X$  не регистрируется. Детектор для

\* ) Процессы множественного образования адронов осуществляются не только в адрон-адронных взаимодействиях, но также и в фотон-адронных, лептон-адронных взаимодействиях и в  $e^+e^-$ -аннигиляции.

исследования процесса (5.2) настраивается так, чтобы регистрировать только вторичные частицы определенного сорта  $c$ , образованные в реакции взаимодействия первичных частиц  $a$  и  $b$ , и измерять их импульс  $p_c$ . Если в процессе (5.2) образуется в конечном состоянии несколько частиц сорта  $c$ , то любая из них может быть зарегистрирована детектором.

Изложенный выше способ изучения процессов множественного образования называется инклюзивным. Совокупность процессов типа (5.2) получила название инклюзивной реакции (инклюзивного процесса).

Сущность инклюзивного способа экспериментального исследования и теоретического описания процессов множественного рождения адронов заключается в том, что прибор автоматически суммирует все эксклюзивные каналы типа (5.1), в которых образуется хотя бы одна частица сорта  $c$  в конечном состоянии. Кинематические характеристики детектируемой (инклюзивной) частицы  $c$  оказываются усредненными по различным каналам со статистическими весами, характеризующими вклад каждого канала в сечение образования частицы  $c$  с импульсами в интервале от  $p_c$  до  $p_c + dp_c$ . Интенсивность инклюзивной реакции (5.2) количественно описывается одночастичным инвариантным дифференциальным сечением ( $s = (p_a + p_b)^2$  — квадрат полной энергии соударения в Ц-системе реакции (5.2)):

$$E_c d^3\sigma/d^3p_c = f(p_c, s). \quad (5.3)$$

Функция  $f(p_c, s)$  — результат суммирования дифференциальных сечений образования частицы сорта  $c$  по всем эксклюзивным каналам (5.1), в которых образуется хотя бы одна частица этого сорта, и суммирования по всем частицам сорта  $c$ , образовавшимся в данном канале (5.1). В соответствии с вышесказанным нетрудно установить нормировку дифференциального сечения (5.3):

$$\int \frac{d^3p_c}{E_c} f(p_c, s) = \sigma_{in}(ab) \sum_{n_c} n_c w(n_c) = \langle n_c \rangle \sigma_{in}(ab). \quad (5.4)$$

В левой части формулы (5.4) интегрирование по компонентам импульса частицы  $c$  проводится в пределах, обусловленных законами сохранения энергии и импульса (см. ниже). Через  $\sigma_{in}(ab)$  обозначено полное сечение неупругого взаимодействия частиц  $a$  и  $b$ \*);  $n_c$  — число частиц сорта  $c$ , образовавшихся в данном эксклюзивном канале;  $w(n_c) = \sigma_{ab}(n_c)/\sigma_{in}(ab)$  — вероятность образования  $n_c$  частиц сорта  $c$  в неупругом  $ab$ -соударении;  $\sigma_{ab}(n_c)$  — сечение процесса образования  $n_c$  частиц сорта  $c$  в неупругом  $ab$ -соударении;  $\langle n_c \rangle = \sum_{n_c} n_c w(n_c)$  — средняя множественность частиц

сорта  $c$ , образовавшихся в неупругом  $ab$ -соударении. Суммирование проводится по всем каналам образования  $n_c$  частиц сорта  $c$  в неупругом  $ab$ -взаимодействии.

Правила сумм для инклюзивных реакций. Условие нормировки (5.4) является простейшим правилом сумм для инклюзивных процессов, связывающим дифференциальный импульсный спектр инклюзивных частиц

\*) При определении средней множественности частиц сорта  $c$  события упругого  $ab$ -рассеяния обычно не учитываются, даже если сорт частицы  $c$  совпадает с сортом одной из первичных частиц.

сорта  $c$  с их средней множественностью  $\langle n_c \rangle$ . Существуют очевидные правила сумм. Например,

$$\sum_c \sum_{n_c} \sigma_{ab}(n_c) = \sigma_{tot}(ab). \quad (5.5)$$

В (5.5) суммирование ведется по всем каналам образования частиц сорта  $c$  и по всем сортам вторичных частиц;  $\sigma_{tot}(ab)$  — полное сечение  $ab$ -взаимодействия:

$$\sum_c \langle n_c \rangle = \langle N \rangle. \quad (5.6)$$

В (5.6)  $\langle N \rangle$  — средняя множественность вторичных частиц в процессах взаимодействия частиц  $a$  и  $b$ ; суммирование ведется по всем сортам вторичных частиц.

Вместо функции  $f(p_c, s)$  для описания импульсно-угловых распределений инклюзивных частиц удобно использовать одночастичную плотность распределения

$$\rho(p_c, s) = f(p_c, s)/\sigma_{in}(ab), \quad (5.7)$$

нормированную на среднюю множественность инклюзивных частиц сорта  $c$ :

$$\int \frac{d^3p_c}{E_c} \rho(p_c, s) = \langle n_c \rangle. \quad (5.8)$$

Плотность распределения  $\rho(p_c, s)$  характеризует число вторичных частиц сорта  $c$  в элементе релятивистского фазового объема:  $dn_c = \rho(p_c, s) d^3p_c/E_c$ .

Существует также следующее правило сумм:

$$\int \frac{d^3p_c}{E_c} (p_c)_i \rho(p_c, s) = \langle P_i^c \rangle, \quad (5.9)$$

где  $(p_c)_i$  — компонента 4-импульса инклюзивной частицы  $(p_c)_0 = E_c$  — энергия частицы  $c$ ,  $(p_c)_\alpha$  — компоненты вектора импульса  $p_c$  частицы  $c$  ( $\alpha = x, y, z$ ),  $\langle P_i^c \rangle$  среднее значение  $i$ -той компоненты суммы 4-импульсов всех частиц сорта  $c$ , образовавшихся в инклюзивном процессе (5.2).

Из законов сохранения энергии и импульса вытекает правило сумм

$$\sum_c \langle P_i^c \rangle = (p_a + p_b)_i, \quad (5.10)$$

где суммирование ведется по всем сортам вторичных частиц;  $p_{a,b}$  — 4-импульсы первичных частиц.

Нетрудно выписать правила сумм, являющиеся следствиями законов сохранения дискретных квантовых чисел, например закона сохранения электрического заряда:

$$\sum_c Q_c \langle n_c \rangle = Q_a + Q_b. \quad (5.11)$$

Здесь  $Q_{c,a,b}$  — электрические заряды частиц  $c, a, b$ .

Двухчастичные инклюзивные процессы. Более детальную информацию о механизмах процессов множественного образования адронов можно получить, изучая инклюзивным способом несколько частиц в конечном состоянии. До сих пор на практике исследовались двухчастичные

инклюзивные реакции

$$a + b \rightarrow c + d + X, \quad (5.12)$$

где  $c, d$  — детектируемые частицы,  $X$  — недетектируемая группа частиц, образующихся совместно с регистрируемыми.

Двухчастичная инвариантная плотность распределения инклюзивных частиц сорта  $c$  и  $d$  определяется следующим образом:

$$\rho(p_c, p_d; s) = E_c E_d [\sigma_{in}(ab)]^{-1} (d^6 \sigma / d^3 p_c d^3 p_d). \quad (5.13)$$

Здесь  $(E_c, p_c)$ ,  $(E_d, p_d)$  — энергии и импульсы инклюзивных частиц  $c$  и  $d$ . Инвариантное дифференциальное сечение  $E_c E_d (d^6 \sigma / d^3 p_c d^3 p_d)$  инклюзивного процесса (5.12) измеряется с помощью детектора, регистрирующего в каждом событии только две частицы определенных сортов ( $c$  и  $d$ ). Это сечение включает все каналы образования частиц  $c$  и  $d$  в  $ab$ -соударениях и все пары частиц  $c$  и  $d$ , родившихся в каждом канале. Функция (5.13) нормирована следующим образом:

$$\int \frac{d^3 p_c}{E_c} \frac{d^3 p_d}{E_d} \rho(p_c, p_d; s) = \langle n_c n_d \rangle, \quad (5.14)$$

где  $\langle n_c n_d \rangle$  — среднее значение произведения множественностей частиц сорта  $c$  и  $d$ , образованных в инклюзивной реакции (5.12). Если сорта частиц совпадают,  $c = d$ , то правило сумм (5.14) следует видоизменить:

$$\int \frac{d^3 p_{c1}}{E_{c1}} \frac{d^3 p_{c2}}{E_{c2}} \rho(p_c, p_d; s) = \langle n_c(n_c - 1) \rangle. \quad (5.15)$$

Смысл нормировки (5.15) состоит в том, что при регистрации второй частицы сорта  $c$  первая частица этого сорта полагается зарегистрированной ( $n_{c2} = n_{c1} - 1 = n_c - 1$ ).

Аналогично можно определить  $n$ -частичные плотности распределения инклюзивных частиц. В принципе, перебор всех возможностей приводит к полному описанию вторичных состояний в процессах  $ab$ -взаимодействия, однако по мере роста числа детектируемых инклюзивных частиц возрастают трудности их экспериментального исследования и теоретического описания.

Изучение двухчастичной плотности распределения инклюзивных частиц позволяет делать заключения о корреляциях характеристик разных частиц. Для описания этих корреляций используют двухчастичную корреляционную функцию, определяемую следующим образом:

$$C(p_c, p_d; s) = \rho(p_c, p_d; s) - \rho(p_c; s)\rho(p_d, s). \quad (5.16)$$

Если образование двух инклюзивных частиц сорта  $c$  и  $d$  происходит в процессе  $ab$ -взаимодействия (5.12) независимо, то их двухчастичная плотность распределения выражается через произведение одночастичных плотностей:

$$\rho(p_c, p_d; s) = \rho(p_c, s)\rho(p_d, s). \quad (5.17)$$

В таком случае корреляционная функция  $C(p_c, p_d; s)$  обращается в нуль. В действительности же соотношение (5.17) не может выполняться строго, так как всегда имеются корреляции между частицами, связанные с законами сохранения энергии импульса и дискретных квантовых чисел. Действие

этих законов следует учитывать при анализе данных о корреляционной функции (5.16) с целью установления динамических механизмов процессов множественного рождения адронов.

## 5.2. Кинематические переменные инклюзивных реакций

Инвариантные кинематические переменные. Одночастичный инклюзивный процесс (5.2) описывается количественно с помощью инвариантного дифференциального сечения (5.3). Функции  $f(p_c, s)$  или плотности распределения  $\rho(p_c, s)$  можно представить в явной релятивистски инвариантной форме, выбрав в качестве их аргументов инвариантные кинематические переменные, характеризующие процесс (5.2). Этот процесс формально выглядит как двухчастичная квазиупругая реакция, если рассматривать совокупность недетектируемых частиц  $X$  как одну компаунд-частицу с переменной массой  $m_X$ . Тогда инвариантные кинематические переменные реакции (5.2) можно выбрать по аналогии с мандельштамовскими переменными  $s, t, u$ :

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad u = (p_b - p_c)^2. \quad (5.18)$$

Эти переменные связаны соотношением

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_X^2. \quad (5.19)$$

Отметим, что по сравнению с двухчастичными упругими и квазиупругими реакциями (см. гл. 4) здесь имеется три независимых кинематических инварианта, а не два, поскольку эффективная масса системы  $X$  не является фиксированной, а может изменяться от события к событию. Она определяется из законов сохранения энергии и импульса:

$$p_a + p_b = p_c + p_X.$$

Инвариант  $p_X^2$  (квадрат полного 4-импульса системы недетектируемых адронов  $X$ ) вычисляется по формуле

$$p_X^2 = (p_a + p_b - p_c)^2 \quad (5.20)$$

и равняется квадрату эффективной массы адронной струи  $X$ .

Любые три из четырех инвариантов  $s, t, u, m_X^2$  можно принять за независимые кинематические характеристики инклюзивного процесса (5.2).

Инвариант  $s$  характеризует начальное состояние. В Л-системе он связан с энергией налетающей частицы  $a$ :

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b.$$

В Ц-системе он равен квадрату полной энергии взаимодействующих частиц  $a$  и  $b$ :

$$s = (E_a^* + E_b^*)^2.$$

Другие инварианты описывают кинематические характеристики инклюзивной частицы  $c$ . Например, инвариант  $u$ , раскрытый через кинематические переменные в Л-системе, связан с энергией  $E_c$  инклюзивной частицы:

$$u = m_b^2 + m_c^2 - 2m_b E_c,$$

а инвариант  $t$  зависит от энергии  $E_c$  и от угла вылета  $\theta_c$  инклюзивной



частицы в Л-системе:

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2E_a E_c + 2p_a p_c \cos \theta_c.$$

Инвариант  $m_X^2$  связан с энергией инклюзивной частицы  $E_c^*$  в Ц-системе реакции (5.2):

$$m_X^2 = s - 2\sqrt{s} E_c^* + m_c^2,$$

а инвариант  $t(u)$  зависит и от  $E_c^*$  и от  $\theta_c^*$  — угла вылета частицы  $c$  в Ц-системе:

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2E_a^* E_c^* + 2p_a^* p_c^* \cos \theta_c^*.$$

Имеется еще одна независимая (но несущественная) кинематическая переменная, отражающая цилиндрическую симметрию конфигурации импульсов вторичных частиц относительно вращений около оси соударения первичных частиц в Ц-системе или направления импульса  $p_a$  налетающей частицы  $a$  в Л-системе. Эта переменная — азимутальный угол вылета инклюзивной частицы, измеряемый в плоскости, перпендикулярной оси соударения первичных частиц. Функция  $f(p_c, s)$  не зависит от этой переменной (если пренебречь возможным влиянием спинов частиц  $a, b, c$ ). В дальнейшем будем полагать, что распределение событий по переменной  $\varphi_c$  равновероятное в геометрическом интервале ее изменения:  $0 \leq \varphi_c \leq 2\pi$ . При релятивистских преобразованиях вдоль оси соударения первичных частиц переменная  $\varphi_c$  остается неизменной. Элемент азимутального угла  $d\varphi_c$  входит в качестве множителя в элемент релятивистского фазового объема частицы  $c$ :  $d^3p_c/E_c = p_c dE_c d\cos\theta_c d\varphi_c$ .

Пределы изменения инвариантных кинематических переменных при заданных массах частиц  $a, b, c$  и фиксированном инварианте  $s$  устанавливаются на основе следующих ограничений: во-первых, угол вылета инклюзивной частицы  $\theta_c^*$  в Ц-системе реакции (5.2) может принимать любые значения в пределах

$$0 \leq \theta_c^* \leq \pi; \quad (5.21)$$

во-вторых, эффективная масса адронной струи  $X$  может изменяться от некоторого минимального значения  $m_0$ , определяемого ниже, до максимального возможного значения, отвечающего образованию инклюзивной частицы в Ц-системе реакции (5.2) в состоянии покоя ( $E_c^* = m_c$ ):

$$m_0^2 \leq m_X^2 \leq (\sqrt{s} - m_c)^2. \quad (5.22)$$

Значение  $m_0$  равно сумме масс минимального возможного числа частиц в системе  $X$ , образующейся совместно с инклюзивной частицей  $c$ , которое обеспечивает выполнение всех законов сохранения в реакции (5.2). Например, в реакции  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + X$  необходимо, чтобы система  $X$  обладала странностью  $S_X = -1$ , нулевым электрическим зарядом, барионным числом  $B_X = 1$  и полужетым спином. Состояние с минимальной массой, обладающее такими квантовыми числами, является  $\Lambda$ -гипероном. Следовательно, значение  $m_0$  в данном случае равно массе  $\Lambda$ -гиперона.

Поскольку инварианты  $t, u$  являются функциями  $E_c^*$  и  $\theta_c^*$ , а  $E_c^* = (s + m_c^2 - m_X^2)/2\sqrt{s}$ , ограничения (5.21), (5.22) позволяют в каждом частном случае установить пределы изменения одного из двух независимых инвариантов — при фиксированном значении другого.

Отметим, что инвариантные переменные при описании инклюзивных процессов (5.2) используются, как правило, в теоретических исследованиях, проводимых в рамках различных моделей, основанных на квантовой теории поля (мультипериферической, реджевской ([17, 18] и др.).

Кинематические переменные в Л- и Ц-системах. В Л-системе реакции (5.2) импульсно-угловую плотность распределения  $\rho(p_c, s)$  инклюзивных частиц можно описывать следующими наборами переменных:

$$\{E_c(|p_c|), \theta_c, \varphi_c\}, \quad \{E_c(|p_c|), p_{c\perp}, \varphi_c\}, \{p_{c\parallel}, p_{c\perp}, \varphi_c\},$$

где  $|p_c| = [E_c^2 - m_c^2]^{1/2}$  — модуль импульса инклюзивной частицы,  $E_c$  — ее энергия;  $p_{c\perp} = |p_c| \sin \theta_c$  — модуль поперечного импульса инклюзивной частицы относительно направления импульса налетающей частицы  $p_a$ ;  $p_{c\parallel} = |p_c| \cos \theta_c$  — продольная компонента импульса инклюзивной частицы,  $\theta_c, \varphi_c$  — полярный и азимутальный углы ее вылета. Отметим дополнительно, что плотность  $\rho(p_c, s)$  может зависеть от энергии первичной частицы  $E_a$  (через инвариант  $s$ ).

В последнее время данные опыта почти не представляют в переменных, относящихся к Л-системе, поскольку топология событий и их интерпретация существенно проще выглядят в Ц-системе. При переходе от описания в Л-системе к описанию в Ц-системе такие переменные, как  $p_{c\perp}, \varphi_c$ , не преобразуются. Для описания импульсно-угловой плотности распределения инклюзивных частиц в Ц-системе  $\rho(p_c^*, s)$  используются практически те же наборы переменных, что и в Л-системе, с заменой энергии, продольной компоненты импульса, угла вылета на соответствующие величины, измеренные в Ц-системе:  $E_c^*, |p_c^*| = p_c^*, p_{c\parallel}^*, \theta_c^*$ .

Укажем пределы изменения этих переменных. Угол вылета  $\theta_c^*$  изменяется в геометрических пределах (5.21). Азимутальный угол  $\varphi_c = \varphi_c^*$  также изменяется в пределах  $0 \leq \varphi_c^* \leq 2\pi$ . Энергия инклюзивной частицы в Ц-системе изменяется в пределах

$$m_c \leq E_c^* \leq (s + m_c^2 - m_0^2)/2\sqrt{s}, \quad (5.23)$$

где  $m_0$  — минимальное допустимое значение суммы масс частиц адронной струи  $X$ , которое обсуждалось выше. Из пределов изменения  $\theta_c^*$  и  $E_c^*$  можно определить и области изменения других кинематических величин. Например, при фиксированном значении  $p_c^*$  поперечный импульс  $p_{c\perp}$  изменяется в пределах

$$0 \leq p_{c\perp} \leq p_c^*.$$

При фиксированном значении  $p_{c\perp}$  энергия  $E_c^*$  изменяется в пределах

$$[m_c^2 + p_{c\perp}^2]^{1/2} \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max},$$

а продольная компонента импульса  $p_{c\parallel}^*$ :

$$-[(E_c^*)_{\max}^2 - m_c^2 - p_{c\perp}^2]^{1/2} \leq p_{c\parallel}^* \leq [(E_c^*)_{\max}^2 - m_c^2 - p_{c\perp}^2]^{1/2}. \quad (5.24)$$

Наиболее употребительные наборы существенных переменных, от которых зависит плотность распределения инклюзивных частиц  $\rho(p_c^*, s)$ , это совокупности  $(p_{c\parallel}^*, p_{c\perp}^*)$  и  $(E_c^*, p_{c\perp}^*)$ .

Переменные светового конуса. Переменные  $p_{c\parallel}^*, E_c^*$  иногда заменяют на так называемые переменные светового конуса:

$$p_{c+}^* = E_c^* + p_{c\parallel}^*, \quad p_{c-}^* = E_c^* - p_{c\parallel}^*, \quad (5.25)$$

и используют одну из этих переменных вместо  $p_{c\parallel}^*$  (или вместо  $E_c^*$ ). Произведение переменных светового конуса

$$p_{c+}^* p_{c-}^* = p_{c\perp}^2 + m_c^2 = m_{c\perp}^2 \quad (5.26)$$

инвариантно относительно релятивистских преобразований вдоль оси соударения первичных частиц. Величину  $m_{c\perp} = [m_c^2 + p_{c\perp}^2]^{1/2}$  называют поперечной массой частицы  $c$ . Правило релятивистского преобразования переменных светового конуса вдоль оси соударения первичных частиц выглядит так:

$$p_{\pm}^* = [(1 \pm v)/(1 \mp v)]^{1/2} p_{\pm}^* \quad (5.27)$$

Здесь  $v$  — скорость новой системы отсчета (например, лабораторной) относительно Ц-системы реакции.

Переменные  $p_{\pm}^*$  используются чаще в теоретических работах, чем в экспериментальных исследованиях, хотя их использование при представлении экспериментальных данных позволяет переводить результаты измерений распределений по  $p_{c\pm}^*$  из одной системы отсчета в другую простым изменением масштаба по оси абсцисс (см. (5.27)).

Переменную  $p_{c+}^*$  удобно использовать при описании распределения инклюзивных частиц  $c$ , вылетающих в переднюю полусферу по отношению к направлению импульса первичной частицы  $a$ , а переменную  $p_{c-}^*$  — для частиц  $c$ , вылетающих в заднюю полусферу в Ц-системе.

Скейлинговые переменные. Экспериментальные данные (см., например, [17, 18]) свидетельствуют о том, что в процессах множественного образования адронов средние значения поперечных импульсов вторичных адронов различных сортов практически не зависят от энергии (в случае вторичных пионов  $\langle |p_{\perp}| \rangle \approx 0,35$  ГэВ/с). В то же время средние значения продольных импульсов  $\langle p_{c\parallel}^* \rangle$  или энергий  $\langle E_c^* \rangle$  приблизительно линейно растут с ростом энергии соударения  $\sqrt{s}$ . Эти обстоятельства свидетельствуют о том, что в поперечном направлении процессы множественного рождения адронов характеризуются неким фиксированным масштабом (размер адронов, радиус сильного взаимодействия), а в продольном направлении такой масштаб отсутствует, по-видимому в связи с релятивистским сжатием продольных размеров адронов и области их взаимодействия с ростом энергии.

При отсутствии других фиксированных фундаментальных масштабов, пространственных или энергетических (массовых), естественно полагать, что продольные импульсы (или энергии) инклюзивных частиц в реакциях (5.2) делаются безразмерными с помощью множителя, равного первичной энергии. А размерность сечения обеспечивается поперечными размерами области взаимодействия. Предположение о том, что плотность распределения инклюзивных частиц по продольным компонентам импульсов должна зависеть только от безразмерной переменной типа

$$x_F = p_{c\parallel}^* / |p_{c\parallel}^*|_{\max} \quad (5.28)$$

получило название гипотезы фейнмановского скейлинга\*) (см. раздел 5.3, а также [17, 18, 28]). Переменная (5.28) называется фейнмановской безразмерной переменной. Величина  $|p_{c\parallel}^*|_{\max}$  определяется соотношениями (5.24):

$$|p_{c\parallel}^*|_{\max} = [(E_c^*)_{\max}^2 - m_c^2 - p_{c\perp}^2]^{1/2}. \quad (5.29)$$

В рамках гипотезы фейнмановского скейлинга, которая неплохо выполняется на опыте, плотность распределения инклюзивных частиц рассматривается как функция только двух переменных  $x_F$  и  $p_{c\perp}$  [17, 18]):

$$\rho(p_{c\parallel}^*; s) = \rho(x_F; p_{c\perp}).$$

Строго говоря, экспериментальные данные свидетельствуют о слабой, но все же заметной зависимости плотности распределения от энергии соударения первичных частиц  $\sqrt{s}$  (см., например, [18]). Однако гипотеза скейлинга и ее обоснование не являются предметом кинематики, поэтому мы здесь лишь фиксируем сложившийся в последние годы подход к выбору кинематических переменных для описания инклюзивных процессов (5.2).

Часто вместо определения переменной  $x_F$  (5.28) используют другое определение, а именно

$$x_F = 2p_{c\parallel}^* / \sqrt{s}. \quad (5.30)$$

Отметим, что в случае определения (5.28) пределы изменения переменной  $x_F$  исключительно просты:

$$-1 \leq x_F \leq 1. \quad (5.31)$$

При определении (5.30) пределы (5.31) имеют приближенный характер; они сильно нарушаются, если  $|p_{c\parallel}^*| \sim p_{c\perp}$ .

Переменная  $x_F$  (5.28) используется для описания распределений по продольным импульсам наиболее быстрых частиц, вылетающих в Ц-системе реакции в переднюю и заднюю полусферы под малыми углами, т.е. при значениях  $x_F$ , не слишком близких к нулю. Особенно удобна переменная  $x_F$  вблизи кинематических границ распределения событий по продольным импульсам при выполнении неравенства  $(1 - |x_F|) \ll 1$ .

На практике переменную  $x_F$  используют при значениях  $|x_F| > (0,1-0,2)$ . Недостатком переменной  $x_F$  является то, что она релятивистски неинвариантна при переходе из Ц-системы, например, в Л-систему. Переменная  $x$ , составленная из продольного импульса частицы  $c$  в Л-системе,

$$x = p_{c\parallel} / |p_{c\parallel}|_{\max},$$

имеет мало общего с переменной  $x_F$ . Даже нижняя граница изменения переменной  $x$  не совпадает с нижней границей изменения  $x_F$  (5.31). Однако для ультрарелятивистских вторичных частиц, вылетающих в Л-системе под малыми углами к импульсу  $p_a$  ( $p_{c\parallel} \gg p_{c\perp}$ ), переменные  $x$  и  $x_F$  примерно совпадают [17]. Иногда полезно использовать переменную

$$x_E = E_c^* / (E_c^*)_{\max},$$

с помощью которой скейлинговое описание экспериментальных данных об энергетических распределениях инклюзивных частиц многих сортов

\*) Скейлинг (от англ. scaling) — масштабная инвариантность, автомодельность.

$(p, n, \pi^*, k^+, \bar{p}, \Sigma^+)$  осуществляется в широкой области энергий соударения (см., например, [29]). Область изменения этой переменной

$$m_{c\perp}/(E_c^*)_{\max} \leq x_E \leq 1$$

при фиксированном значении переменной  $p_{c\perp}$  (или  $m_{c\perp}$ ). Однако и эта переменная не является релятивистски инвариантной. С точки зрения ковариантного описания удобны безразмерные переменные, составленные из переменных светового конуса (5.25):

$$x_{\pm} = p_{c\pm}/(p_{c\pm})_{\max}. \quad (5.32)$$

Из правил релятивистских преобразований переменных  $p_+$ ,  $p_-$  (5.27) следует, что переменные  $x_+$  и  $x_-$  не изменяют своего вида (5.32), если преобразования совершаются вдоль оси соударения первичных частиц в Ц-системе. Переменную  $x_+$  удобно использовать для анализа распределения событий в переднем конусе в Ц-системе, а переменную  $x_-$  — в заднем конусе. В этих условиях переменные  $x_+$ ,  $x_-$  изменяются при фиксированном значении  $p_{c\perp}$  (или  $m_{c\perp}$ ) в пределах

$$m_{c\perp}/[(E_c^*)_{\max} + [(E_c^*)_{\max}^2 - m_{c\perp}^2]^{1/2}] \leq x_{\pm} \leq 1.$$

Здесь учтено, что в переднем конусе  $0 \leq \theta_c^* \leq \pi/2$ , а в заднем  $\pi/2 \leq \theta_c^* \leq \pi$ . К сожалению, переменные  $x_{\pm}$  пока редко используются для представления экспериментальных данных, хотя и позволяют придать плотности распределения  $\rho(x_{\pm}, p_{0\perp})$  ковариантный характер.

**Переменная быстроты.** Одной из наиболее распространенных кинематических переменных, употребляемых в физике множественных процессов, является безразмерная переменная

$$y_c = (1/2) \ln [(E_c + p_{c\parallel})/(E_c - p_{c\parallel})], \quad (5.33)$$

называемая быстротой\*). Эта переменная выражается через переменные светового конуса:

$$y_c = (1/2) \ln (p_{c+}/p_{c-}). \quad (5.34)$$

Из этого определения и релятивистских преобразований переменных светового конуса (5.27) вытекает правило преобразования быстроты из одной инерциальной системы отсчета в другую, движущуюся со скоростью  $v$  вдоль оси соударения первичных частиц\*\*):

$$y_c = y_c^* + (1/2) \ln [(1+v)/(1-v)]. \quad (5.35)$$

Здесь  $v = p_a/(E_a + m_b)$  — скорость движения Л-системы относительно Ц-системы,  $y_c^*$  — быстрота частицы  $c$  в Ц-системе,  $y_c$  — ее быстрота в Л-системе. Соотношение (5.35) выписано для конкретного случая преобразования от Ц-системы к Л-системе. Оно, разумеется, справедливо и в более общем случае для перехода из одной системы в другую, движущуюся отно-

сительно первой со скоростью  $v$  вдоль указанного выше направления. При этом нужно учитывать также знак направления скорости. Положительным направлением считают направление импульса налетающей частицы  $p_a$  в Л-системе или направление  $p_a^*$  в Ц-системе; релятивистское преобразование в систему отсчета, движущуюся в противоположном направлении, совершается со скоростью  $-v$ .

Закон релятивистского преобразования быстроты (5.35) показывает, что эта кинематическая переменная не является релятивистским инвариантом даже при продольных релятивистских преобразованиях. Однако при таких преобразованиях быстрота изменяется на аддитивную величину

$$y_v = (1/2) \ln [(1+v)/(1-v)],$$

зависящую только от скорости продольного релятивистского преобразования. Поэтому плотность распределения событий по быстротам при переходе из одной системы отсчета в другую с помощью продольного релятивистского преобразования сохраняет свою форму, испытывая сдвиг как целое вдоль оси быстрот на величину  $y_v$ . Разность двух значений быстроты частицы  $\Delta y_c = y_{c1} - y_{c2}$  и, соответственно, дифференциал быстроты  $dy_c$  инвариантны относительно продольных релятивистских преобразований.

Переменная быстроты используется как кинематическая характеристика, описывающая состояние движения частицы в продольном направлении, и употребляется совместно с переменной поперечного импульса  $p_{c\perp}$  как вторая существенная независимая кинематическая переменная. Ее связь с продольным импульсом  $p_{c\parallel}$  и энергией  $E_c$  вытекает из определения (5.33); связь с переменными светового конуса представляется соотношением (5.34). Из (5.26) и (5.34) следуют представления для переменной быстроты:

$$y_c = \ln (p_{c+}/m_{c\perp}) = -\ln (p_{c-}/m_{c\perp}). \quad (5.36)$$

Из соотношений (5.36) нетрудно выяснить границы изменения переменной быстроты при фиксированном значении  $p_{c\perp}$  (или  $m_{c\perp}$ ). В Ц-системе реакции (5.2) эти границы имеют вид

$$\begin{aligned} -\ln \{[(E_c^*)_{\max} + ((E_c^*)_{\max}^2 - m_{c\perp}^2)^{1/2}]/m_{c\perp}\} &\leq y_c^* \leq \\ &\leq \ln \{[(E_c^*)_{\max} + ((E_c^*)_{\max}^2 - m_{c\perp}^2)^{1/2}]/m_{c\perp}\}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где  $(E_c^*)_{\max} = (s + m_c^2 - m_b^2)/2\sqrt{s}$  (см. (5.23)). В других системах отсчета, связанных с Ц-системой продольным релятивистским преобразованием, границы изменения переменной быстроты находятся на основе (5.37) добавкой к обеим частям неравенства аддитивного слагаемого  $y_v$  (см. (5.35)). При достаточно высоких энергиях, когда  $\sqrt{s} \gg m_c$ , в области значений  $m_{c\perp} \leq \sqrt{s}/2$  неравенства (5.37) упрощаются:

$$-\ln (\sqrt{s}/m_{c\perp}) \leq y_c^* \leq \ln (\sqrt{s}/m_{c\perp}).$$

Отметим, что пределы изменения быстроты (5.37) симметричны в Ц-системе относительно значения  $y_c^* = 0$ . В других системах отсчета это условие не выполняется.

\*) Переменную  $y_c$  иногда называют продольной быстротой, оставляя термин "быстрота" за величиной  $y_c = (1/2) \ln [(E_c + p_{c\parallel})/(E_c - p_{c\parallel})]$ .

\*\*) Релятивистские преобразования вдоль (против) этого направления называют продольными.

Абсолютные границы изменения быстроты  $y_c^*$  вытекают из (5.37) и отвечают значению  $p_{c\perp} = 0$  ( $m_{c\perp} = m_c$ ):

$$-\ln [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}/m_c] \leq y_c^* \leq \ln [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}/m_c]. \quad (5.38)$$

Выпишем здесь также обратные соотношения, выражающие энергию и продольный импульс частицы через переменную быстроты:

$$E_c = m_{c\perp} \operatorname{ch} y_c, \quad p_{c\parallel} = m_{c\perp} \operatorname{sh} y_c. \quad (5.39)$$

Эти соотношения следуют из представлений быстроты через переменные светового конуса (5.36). Они справедливы в любых системах отсчета, связанных между собой продольными релятивистскими преобразованиями.

На основе (5.39) и (5.23) устанавливаются пределы изменения переменной  $m_{c\perp}$  (или  $p_{c\perp}$ ) при фиксированной скорости  $y_c^*$ :

$$m_c \leq m_{c\perp} \leq (E_c^*)_{\max}/\operatorname{ch} y_c^*, \quad (5.40)$$

$$0 \leq p_{c\perp} \leq \{[(E_c^*)_{\max}^2/\operatorname{ch}^2 y_c^*] - m_c^2\}^{1/2}.$$

Фейнмановская переменная  $x_F$  (5.28) связана с быстротой  $y_c^*$  в Ц-системе следующим соотношением, которое легко выводится из определений (5.28), (5.39) и ограничения (5.37):

$$x_F = \operatorname{sh} y_c^*/\operatorname{sh} (y_c^*)_{\max}, \quad (5.41)$$

где

$$(y_c^*)_{\max} = \ln \{[(E_c^*)_{\max} + ((E_c^*)_{\max}^2 - m_{c\perp}^2)^{1/2}]/m_{c\perp}\}.$$

При  $|x_F| \rightarrow 0$  быстрота  $y_c^*$  также стремится к нулю. Если при этом рассматривать интервал  $\Delta x_F \approx m_{c\perp}/|p_{c\parallel}|_{\max}$  при конечных значениях  $m_{c\perp}$  и при  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ , то этот интервал становится исчезающе малым:  $\Delta x_F \approx 2m_{c\perp}/\sqrt{s} \rightarrow 0$ .

В тех же условиях соответствующий интервал быстрот

$$\Delta y_c^* = \Delta x_F |p_{c\parallel}|_{\max}/m_{c\perp} \approx 1$$

оказывается постоянным. Это означает, что переменная быстроты как бы растягивает малые интервалы фейнмановской переменной  $x_F$  в центральной области  $x_F \approx 0$ . Поэтому в области сравнительно небольших значений  $|x_F| \lesssim (0,1-0,2)$  изучение распределений инклюзивных частиц по скорости оказывается более информативным, чем по переменной  $x_F$ . В интервале значений  $|x_F|$  от 0 до 1 быстрота изменяется от 0 до  $(y_c^*)_{\max}$ . Этот интервал быстрот при фиксированном значении  $m_{c\perp}$  и  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  логарифмически растет с энергией:  $\Delta y_c \approx \ln(\sqrt{s}/m_{c\perp})$ , т.е. оказывается снова более растянутым по сравнению с интервалом изменения  $x_F$ , что позволяет лучше изучать тонкие детали поведения распределений инклюзивных частиц в зависимости от их продольных импульсов, чем при использовании переменной  $x_F$ . Использование переменной  $x_F$  вблизи кинематических пределов (при  $(1 - |x_F|) \ll 1$ ) оправданно, если иметь в виду сравнение теоре-

тических предсказаний (см., например, [17], [18]) с данными опыта. Теоретические предсказания обычно формулируются в терминах переменной  $x_F$  и выражаются в степенной зависимости плотности распределения событий от этой переменной вблизи кинематических пределов:

$$\rho(x_F, p_{c\perp}) \sim (1 - |x_F|)^{\alpha(p_{c\perp})}.$$

Показатель степени  $\alpha(p_{c\perp})$  предсказывается на основе теоретического метода комплексных моментов [17, 18]. Впрочем, вблизи значений  $|x_F| \approx 1$  фейнмановская переменная  $x_F$  и быстрота  $y_c^*$  связаны простыми соотношениями:

$$x_F \approx \exp[y_c^* - (y_c^*)_{\max}], \quad x_F > 0,$$

$$x_F \approx \exp\{-[-y_c^* - (y_c^*)_{\max}]\}, \quad x_F < 0.$$

**Псевдобыстрота.** В процессах множественного образования адронов при высоких энергиях большинство вторичных частиц в Л-системе являются ультрарелятивистскими и вылетают под малыми углами  $\theta_c \ll 1$  к импульсу первичного пучка  $p_a$ . Если рассматривать не слишком малые углы вылета (поперечный импульс  $p_c \gtrsim m_{c\perp}$ ,  $\theta_c \gtrsim m_c/p_c$ ), но  $p_{c\perp} \ll |p_{c\parallel}|$ , то в интервале углов

$$(m_c/p_c) \lesssim \theta_c \lesssim 1$$

переменная быстроты в Л-системе приближенно представляется через угол вылета  $\theta_c$ :

$$y_c = \ln \frac{E_c + p_{c\parallel}}{m_{c\perp}} \approx -\ln \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta_c \right). \quad (5.42)$$

Это приближение можно уточнить, если не требовать выполнения условия  $p_{c\perp} \ll |p_{c\parallel}|$  ( $\theta_c \ll 1$ ).

В области углов

$$(m_c/p_c) \lesssim \theta_c \lesssim 1, \quad (5.43)$$

где допускаются значения  $p_{c\perp} \approx p_{c\parallel}$ , имеют место следующие соотношения:

$$y_c \approx (1/2) \ln [(1 + \cos \theta_c)/(1 - \cos \theta_c)] \approx -\ln [\operatorname{tg}(\theta_c/2)]. \quad (5.44)$$

Величину

$$\eta_c = -\ln [\operatorname{tg}(\theta_c/2)]$$

часто называют псевдобыстротой, а экспериментальные данные, полученные посредством измерения углов вылета вторичных частиц в Л-системе, представляют в виде распределения событий по псевдобыстроте  $\eta_c$  (5.44) или по переменной

$$\lambda_c = \ln(\operatorname{tg} \theta_c), \quad (5.45)$$

связанной с приближением (5.42):

$$y_c \approx \ln 2 - \lambda_c.$$

Переменные  $\eta_c$  и  $\lambda_c$  в области малых углов  $\theta_c \ll 1$  и высоких энергий ( $E_c \gg m_c$ ) связаны соотношением

$$\eta_c \approx \ln 2 - \lambda_c.$$

Поэтому иногда переменную  $\lambda_c$  также называют псевдобыстротой.

В связи с созданием  $pp$ - и  $\bar{p}p$ -встречных пучков высоких энергий весьма актуальным стало представление данных о множественных процессах в виде распределений по переменной псевдобыстроты, выраженной через углы вылета частиц в Ц-системе. Для ультрарелятивистских частиц, рождающихся в Ц-системе со скоростями  $v_c^* \approx 1$  (точнее,  $1 - v_c^* \ll 1$  или  $p_c^* \gg m_c$ ) имеет место следующее приближенное соотношение:

$$y_c^* \approx -\ln [\operatorname{tg}(\theta_c^*/2)]. \quad (5.46)$$

Эту формулу можно использовать в интервале углов

$$m_c/p_c \leq \theta_c^* \leq \pi - (m_c/p_c). \quad (5.47)$$

Переменную псевдобыстроты в Ц-системе

$$\eta_c^* = -\ln [\operatorname{tg}(\theta_c^*/2)] \quad (5.48)$$

можно с помощью формул релятивистских преобразований трансформировать в Л-систему:

$$\operatorname{tg} \theta_c \approx \sqrt{1 - v^2} \operatorname{tg}(\theta_c^*/2),$$

где  $v = p_a/(E_a + m_b)$  ( $1 - v \ll 1$ ), и связать с переменной  $\lambda_c$  (5.45) следующим соотношением:

$$\eta_c^* = -\lambda_c - \ln \gamma. \quad (5.49)$$

В (5.49)  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ . С помощью (5.49) распределение событий по  $\lambda_c$  в Л-системе переводится в распределение событий по псевдобыстроте  $\eta_c^*$  (5.48) в Ц-системе.

Использование переменных псевдобыстроты  $\eta_c$ ,  $\lambda_c$ ,  $\eta_c^*$  вместо быстроты  $y_c$ ,  $y_c^*$  позволяет получать важные экспериментальные результаты на основе измерения только углов вылета вторичных частиц. Эта процедура намного проще (и дешевле!), чем измерение импульсов (энергий) вторичных частиц, образующихся в процессах множественного рождения адронов. Возможность использования простых переменных псевдобыстроты для изучения множественных процессов при высоких энергиях — несомненная заслуга кинематики.

Отметим, что впервые переменная псевдобыстроты была введена в арсенал высоких энергий в работе [30].

Соотношения между распределениями по различным продольным кинематическим переменным. В связи с тем, что в процессах множественного образования адронов средние значения поперечных импульсов вторичных адронов оказываются ограниченными (см., например, [17, 18]) и практически не меняются с ростом энергии, переменная поперечного импульса инклюзивной частицы обычно рассматривается как одна из двух существенных переменных, характеризующих конечное состояние в инклюзивном процессе (5.2).

Вторая существенная переменная зависит от продольного импульса инклюзивной частицы и выбирается в самых разнообразных формах, наиболее распространенные из которых обсуждались выше:

$$p_{c\parallel}, E_c, p_{c\perp}, p_{c\parallel}^*, E_c^*, x_F, x_E, x_{\pm}, y_c, y_c^*, \eta_c, \lambda_c, \eta_c^*.$$

Вычислим, далее, якобианы переходов от одной из этих переменных, называемых иногда продольными кинематическими переменными, к другой в элементе релятивистского фазового объема инклюзивной частицы  $d^3 p_c/E_c$ . В сферической системе координат этот элемент имеет вид

$$d^3 p_c/E_c = p_c dE_c d\Omega_c = p_c dE_c d\cos\theta_c d\varphi_c,$$

причем переменные  $E_c$ ,  $p_c$ ,  $\theta_c$ ,  $\varphi_c$  здесь могут быть выбраны в любой инерциальной системе вследствие релятивистской инвариантности элемента  $d^3 p_c/E_c$ . В цилиндрических координатах этот элемент в Л-системе и Ц-системе представляется выражениями

$$\frac{d^3 p_c}{E_c} = \frac{dp_{\parallel} dp_{\perp}}{(p_{c\parallel}^2 + m_c^2)^{1/2}} = \frac{dp_{c\parallel}^* dp_{c\perp}}{[(p_{c\parallel}^*)^2 + m_c^2]^{1/2}},$$

где  $dp_{c\perp} = d^2 p_{c\perp} = p_{c\perp} dp_{c\perp} d\varphi_c$ . Элемент  $dp_{c\perp}$  выглядит одинаково в системах отсчета, движущихся с постоянными скоростями вдоль оси соударения в Ц-системе или вдоль (или против) импульса налетающей частицы в Л-системе. Этот вывод следует из инвариантности величин  $p_{c\perp}$  и  $\varphi_c$  относительно продольных релятивистских преобразований. Поэтому в дальнейшем ограничимся преобразованием релятивистского продольного фазового объема  $dp_{c\parallel}/E_c = dp_{c\parallel}^*/E_c^*$ . Вместо переменной  $p_{c\parallel}^*$  иногда используют энергетическую переменную  $E_c^*$ . Исходя из соотношения

$$p_{c\parallel}^* = \pm [(E_c^*)^2 - m_c^2]^{1/2},$$

имеем

$$dp_{c\parallel}^*/E_c^* = 2dE_c^*/[(E_c^*)^2 - m_c^2]^{1/2},$$

где множитель 2 появляется из-за двузначности связи  $p_{c\parallel}^*$  с  $E_c^*$ . Переменную  $E_c^*$  можно заменить на  $p_c^* = |p_c^*|$ , имея в виду, что  $E_c^* = [(p_c^*)^2 + m_c^2]^{1/2}$ :

$$dp_{c\parallel}^*/E_c^* = 2p_c^* dp_c^*/E_c^* [(p_c^*)^2 - p_{c\perp}^2]^{1/2}.$$

Переход от переменной  $p_{c\parallel}$  в Л-системе к переменной энергии  $E_c$  или импульса  $p_c$  в этой же системе требует дополнительного анализа, поскольку в этой системе отсчета пределы изменения  $p_{c\parallel}$  не симметричны относительно точки  $p_{c\parallel} = 0$ . Более того, значение  $p_{c\parallel} = 0$  вообще может не реализоваться, если существует максимальный возможный угол вылета частицы  $c$ . По аналогии с двухчастичным рассеянием (см. раздел 4.1) можно установить, что угол вылета в Л-системе ограничен, если максимально возможная скорость частицы  $c$  в Ц-системе  $(v_c^*)_{\max}$  не превышает скорости Л-системы относительно Ц-системы:

$$(v_c^*)_{\max} \leq v.$$

В этих условиях максимальный возможный угол вылета частицы  $c$

$$(\theta_c)_{\max} = \arcsin [\sqrt{s} (p_c^*)_{\max} / m_c p_a]. \quad (5.50)$$

При этом выполнено неравенство

$$\sqrt{s} (p_c^*)_{\max} \leq m_c p_a,$$

где  $(p_c^*)_{\max} = [(E_c^*)_{\max}^2 - m_c^2]^{1/2}$ , а  $(E_c^*)_{\max}$  дается формулой (5.23). Анализ границ изменения энергии  $E_c$  или продольного импульса  $p_{c\parallel}$  в Л-системе при фиксированном значении  $p_{c\perp}$  проводится на основе одного из неравенств (5.22):

$$(p_a + p_b - p_c)^2 \geq m_0^2,$$

с учетом соотношения  $E_0^2 = p_{c\parallel}^2 + p_{c\perp}^2 + m_c^2$ .

Переход от переменной  $p_{c\parallel}^*$  к безразмерной переменной  $x_F$  осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{c\parallel}^*}{E_c^*} &= \\ &= \frac{dx_F}{\{x_F^2 + [m_{c\perp}/|p_{c\parallel}^*|_{\max}]^2\}^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$|p_{c\parallel}^*|_{\max} = [(E_c^*)_{\max}^2 - m_{c\perp}^2]^{1/2}.$$

К переменной  $x_E = E_c^*/(E_c^*)_{\max}$  переход осуществляется следующим образом:

$$\frac{dp_{c\parallel}^*}{E_c^*} = \frac{2dx_E}{[x_E^2 - (m_{c\perp}/E_{c\max}^*)^2]^{1/2}},$$

а к переменным  $x_{\pm}$  согласно формулам

$$\frac{dp_{c\parallel}}{E_c} = \frac{dx_{\pm}}{x_{\pm}}.$$

При выводе последнего соотношения используются формулы  $p_+ + p_- = m_{c\perp}^2$ ,  $E_c = (p_+ + p_-)/2$ ,  $p_{c\parallel} = (p_+ - p_-)/2$ .

Наиболее просто осуществляется переход к переменным быстроты

$$dy_c = dy_c^* = dp_{c\parallel}/E_c \quad (5.51)$$

и несколько сложнее к переменной псевдобыстроты

$$\frac{dp_{c\parallel}}{E_c} = \frac{d\eta_c^*}{[1 + (m_c/p_{c\perp} \operatorname{ch} \eta_c^*)^2]^{1/2}}. \quad (5.52)$$

При выводе последней формулы использовались соотношения (см. (5.48))

$$p_{c\parallel}^* = p_{c\perp} \operatorname{sh} \eta_c^*, \quad E_c^* = (p_{c\perp}^2 \operatorname{ch} \eta_c^* + m_c^2)^{1/2}.$$

Из (5.51) и (5.52) следует, что связь между распределением по быстротам и по псевдобыстротам содержит дополнительный множитель

$$\frac{dn}{d\eta_c^* d^2 p_{c\perp}} = \left[ 1 + \left( \frac{m_c}{p_{c\perp} \operatorname{ch} \eta_c^*} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{dn}{dy_c^* d^2 p_{c\perp}}. \quad (5.53)$$

Этот множитель вблизи значений  $\eta_c^* = 0$  ( $\theta_c^* = \pi/2$ ) при фиксированном значении  $p_{c\perp}$  минимален и может имитировать кинематический минимум в спектре псевдобыстрот, даже если быстротный спектр в окрестности точки  $y_c^* = 0$  не имеет минимума. Особенно ярко этот минимум проявляется при малых значениях  $p_{c\perp} \lesssim m_c$ , при которых приближенное равенство  $\eta_c^* \approx y_c^*$  нарушается. На этот чисто кинематический эффект было указано в работах [31, 32] в связи с ошибочной трактовкой экспериментально наблюдаемого минимума при  $\eta_c^* = 0$  в распределении событий по псевдобыстротам как свидетельства в пользу образования двух фэйрболлов ("огненных шаров") в процессах множественного рождения адронов. Эта ошибочная трактовка, к сожалению, сохраняется вплоть до последнего времени (см., например, [33]).

Переход к переменным  $\lambda_c$ ,  $\eta_c$  легко осуществляется на основе (5.52) и соотношений (5.49) и  $\eta_c = \ln 2 - \lambda_c$ .

### 5.3. Области фрагментации и пионизации в множественных процессах. Явление скейлинга

**Гипотеза предельной фрагментации [34].** О поведении плотности распределения инклюзивных частиц  $\rho(p_c; s)$  выдвинут целый ряд динамических гипотез и разработано несколько вариантов теории, основанных на теоретико-полевых и статистически-гидродинамических построениях (см., например, [17, 18]). В книге, посвященной кинематике, уместно ограничиться обсуждением сравнительно общих теоретических гипотез, опирающихся на полуинтуитивные качественные соображения, дополненные кинематическим анализом. К гипотезам такого рода относится гипотеза предельной фрагментации, выдвинутая в работе [34]. Прежде всего, определим, что такое фрагменты и что такое область фрагментации. Фрагментами первичной частицы ( $a$  или  $b$ ), участвующей в процессе взаимодействия, в результате которого происходит множественное образование адронов, называется группа вторичных адронов, переносящая заметную долю импульса (энергии) этой частицы. Областью фрагментации первичной частицы  $a$  (или  $b$ ) называют кинематический интервал изменения продольной переменной инклюзивной частицы  $s$ , примыкающий к предельным значениям (максимальному или минимальному) этой переменной. В этой области еще сказывается влияние (корреляция) первичной частицы на кинематические характеристики и квантовые числа вторичной инклюзивной частицы. Отметим, что данные определения носят качественный характер и не претендуют на строгое количественное содержание. Очевидно, что областей фрагментации две (по числу первичных частиц).

Гипотеза предельной фрагментации заключается в следующем предположении [34]: при достаточно высоких энергиях достигается такой режим



процесса множественного рождения адронов, когда продольные импульсы вторичных частиц — фрагментов мишени в Л-системе — перестают расти с увеличением первичной энергии и остаются в дальнейшем ограниченными. При этом плотность распределения фрагментов мишени  $b$  перестает зависеть от кинематических характеристик налетающей первичной частицы  $a$  и от ее квантовых чисел. Другими словами, начиная с некоторого, достаточно большого значения энергии первичной частицы  $a$  доля ее энергии, идущая на образование фрагментов частицы-мишени  $b$ , достигает предельного значения и при дальнейшем увеличении энергии частицы  $a$  перестает увеличиваться. Фрагменты мишени не испытывают влияния квантовых чисел налетающей частицы  $a$  и их состояние определяется только квантовыми числами частицы-мишени  $b$ . Это означает, что плотность распределения адронов — фрагментов мишени по продольным импульсам  $p_{c\parallel}$  в Л-системе — не зависит от энергии налетающей частицы  $E_a$  (или от  $s$ ), но зависит от квантовых чисел мишени  $b$ :

$$\rho(p_c; s) = \rho_b(p_{c\parallel}, p_{c\perp}). \quad (5.54)$$

Выразим продольную составляющую импульса инклюзивной частицы через безразмерную переменную  $x_F$  при высоких энергиях, когда  $\sqrt{s} \gg m_a, m_b, m_c, m_0$ , и ограниченных значениях поперечного импульса ( $m_{c\perp} \ll \text{const}(s) \ll \sqrt{s}$ ). Величина  $p_{c\parallel}$  представляется через кинематические переменные Ц-системы с помощью формулы релятивистского преобразования:

$$p_{c\parallel} = [(E_a + m_b) p_{c\parallel}^* + p_a E_c^*] / \sqrt{s}.$$

В Ц-системе фрагменты мишени вылетают преимущественно в заднюю полушару ( $p_{c\parallel}^* < 0$ ). С учетом этого обстоятельства, принимая  $x_F \approx 2p_{c\parallel}^* / \sqrt{s}$  и учитывая, что в Ц-системе при высоких энергиях фрагменты мишени являются ультрарелятивистскими частицами, находим

$$p_{c\parallel} \approx (m_{c\perp}^2 - m_b^2 x_F^2) \{ m_b [(x_F^2 + 4m_{c\perp}^2/s)^{1/2} - x_F] \}^{-1}. \quad (5.55)$$

Напомним, что в (5.55)  $x_F < 0$ . Если  $|x_F| \gg 2m_{c\perp}/\sqrt{s}$ , то величина  $p_{c\parallel}$  не зависит от первичной энергии, а при фиксированном значении  $x_F$  она ограничена в силу ограниченности  $m_{c\perp}$  (или  $p_{c\perp}$ ). Таким образом, в области значений фейнмановской переменной

$$-1 \leq x_F \leq -2m_{c\perp}/\sqrt{s} \quad (5.56)$$

продольные импульсы фрагментов мишени удовлетворяют требованиям гипотезы предельной фрагментации:

$$p_{c\parallel} \approx (m_b x_F - m_{c\perp}^2 / m_b x_F) / 2. \quad (5.57)$$

Величина  $p_{c\parallel}$  (5.57) определяется безразмерной переменной  $x_F$ , массами мишени и инклюзивной частицы, а также ее ограниченным поперечным импульсом. Таким образом, плотность распределения  $\rho(p_c; s)$  в области (5.56) определяется переменными  $x_F$  и  $p_{c\perp}$ :

$$\rho(p_{c\parallel}, p_{c\perp}) = \rho_b(x_F, p_{c\perp}). \quad (5.58)$$

Свойство плотности распределения зависит исключительно от отношения  $p_{c\parallel}$  и первичного импульса  $p_a^* \approx \sqrt{s}/2$ , а не от этих переменных по отдельности, называют скейлингом, или масштабной инвариантностью.

Используя аналогию между Л-системой и АЛ-системой (см. раздел 1.3), можно показать, что ограниченность продольного импульса частицы  $c$  ( $p_{c\parallel}^*$ ) в системе отсчета, где покоится частица  $a$ , приводит к свойству скейлинга плотности распределения инклюзивных частиц в области фрагментации налетающей частицы в Ц-системе.

В интервале

$$2m_{c\perp}/\sqrt{s} \leq x_F \leq 1, \quad (5.59)$$

согласно гипотезе предельной фрагментации,

$$\rho_a(p_{c\parallel}^*, p_{c\perp}) = \rho_a(x_F, p_{c\perp}). \quad (5.60)$$

Рассмотренная выше динамическая гипотеза предельной фрагментации, как видно из проведенного анализа, по существу, приводит к свойству скейлинга в областях (5.56), (5.59) благодаря кинематическим соотношениям типа (5.55), (5.57). Да и само требование ограниченности продольных импульсов фрагментов мишеней в Л-системе или в АЛ-системе является, по существу, кинематическим ограничением, основанным на интуитивных динамических соображениях. Поэтому следствия гипотезы предельной фрагментации (5.58), (5.60) в значительной мере основаны на кинематических закономерностях.

Согласно рассматриваемой здесь гипотезе, свойство скейлинга должно иметь место при достаточно высоких энергиях практически во всей области изменения безразмерной переменной  $x_F$  при ограниченных поперечных импульсах за исключением узкого интервала значений

$$-2m_{c\perp}/\sqrt{s} \leq x_F \leq 2m_{c\perp}/\sqrt{s}, \quad (5.61)$$

который с ростом энергии ( $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ ) вообще исчезает.

В терминах переменной быстроты инклюзивной частицы в Ц-системе реакции (5.2) область (5.61) оказывается конечной. Действительно, при  $x_F \rightarrow 0$  и при  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  имеет место следующая связь между переменными  $x_F$  и  $y_c^*$  (см. (5.41)):

$$x_F \approx 2m_{c\perp} y_c^* / \sqrt{s},$$

и интервал (5.61) превращается в следующий интервал изменения  $y_c^*$ :

$$-l \leq y_c^* \leq l, \quad (5.62)$$

где, согласно экспериментальным данным [18],  $l \sim 2$  (здесь следует учесть некоторую нечеткость в определении границ областей фрагментации в рамках рассматриваемой гипотезы). При высоких энергиях в интервале быстрот (5.62), который называют центральной областью быстрот, может находиться только конечное число частиц, если плотность распределения  $\rho(y_c^*, p_{c\perp})$  в этом интервале подчиняется свойству масштабной инвариантности:

$$\Delta n_c \approx \int_{-l}^l dy_c^* \int_0^{\sqrt{s}/2} dp_{c\perp} p_{c\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_c \rho(y_c^*, p_{c\perp}) \approx \text{const}(s). \quad (5.63)$$

В силу ограниченности среднего значения поперечного импульса  $\langle p_{c1} \rangle$  интеграл по  $p_{c1}$  в (5.63) сходится в области значений  $p_{c1} \lesssim \langle p_{c1} \rangle = \text{const}(s)$  и поэтому при  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  не зависит от энергии. Интегрирование по  $y_c^*$  и  $\varphi_c$  приводит в конечных пределах и также не может привести к зависимости  $\Delta n_c$  от первичной энергии  $\sqrt{s}$ . В области фрагментации в рамках рассматриваемой гипотезы средняя множественность вторичных адронов должна увеличиваться с ростом энергии соударения за счет увеличения размеров областей фрагментации в терминах переменной быстроты. Ввиду ограниченности эффективных значений поперечных импульсов вторичных частиц интегрирование по  $p_{c1}$  плотности распределения  $\rho(y_c^*, p_{c1})$  при  $s \rightarrow \infty$  приводит к следующему результату для средней множественности вторичных частиц \*) в областях фрагментации:

$$\langle n_c \rangle \approx \int_l^{\ln(\sqrt{s}/m_c)} \rho_a(y_c^*) dy_c^* + \int_{-\ln(\sqrt{s}/m_c)}^{-l} \rho_b(y_c^*) dy_c^* \approx \\ \approx [\rho_a(\bar{y}_c^*) + \rho_b(\bar{y}_0^*)] \ln(\sqrt{s}/m_c). \quad (5.64)$$

В формуле (5.64)  $\bar{y}_c^*$  — эффективное значение быстроты из интервала быстрой в области фрагментации налетающей частицы  $a$  ( $l \lesssim y_c^* \lesssim \ln(\sqrt{s}/m_c)$ ),  $\bar{y}_0^*$  — эффективное значение быстроты из интервала быстрой в области фрагментации частицы  $b$  ( $-\ln(\sqrt{s}/m_c) \lesssim y_c^* \lesssim -l$ ). Оценка интегралов в (5.64) произведена на основе теоремы о среднем значении для определенных интегралов.

Если полагать, что значения плотности распределения в эффективных точках  $\bar{y}_c^*$ ,  $\bar{y}_0^*$  слабо зависят от энергии, что характерно для гладких распределений, "размазанных" по всему интервалу быстрой, то формула (5.64) предсказывает медленный логарифмический рост средней множественности с энергией. На опыте наблюдается рост множественности несколько более быстрый, чем логарифмический (см., например, [17, 18]). Это связано, по-видимому, с особенностями динамического поведения функции плотности распределения по быстрой  $\rho(y_c^*, s)$ , демонстрирующей медленный рост с энергией в области быстрой, не слишком близких к кинематическим пределам. Однако вопросы динамики не входят в компетенцию кинематики и изучаются в рамках динамических моделей множественных процессов [18].

Фейнмановский скейлинг [28, 35]. Если гипотеза предельной фрагментации предсказывает масштабно инвариантное поведение спектров инклюзивных частиц только в областях фрагментации, то гипотеза фейнмановского скейлинга [28, 35], основанная на теоретическом анализе эксперименталь-

\*) Среди вторичных адронов в процессах множественного рождения преобладают пионы (около 80%).

ных данных о кварк-партонной внутренней структуре нуклонов (см., например, [11, 17, 18, 28]), а также на ряде теоретико-полевых моделей [17, 18], предсказывает скейлинговое поведение спектров во всей кинематической области изменения фейнмановской переменной  $x_F$  или переменной быстроты  $y_c^*(y_c)$ . При этом дополнительно предполагается и обосновывается в рамках динамических моделей [17, 18] существование не исчезающей с ростом энергии центральной области вблизи значения  $x_F = 0$ :

$$-x_0 \lesssim x_F \lesssim x_0, \quad (5.65)$$

где  $x_0 \approx (0,1 - 0,2)$  и не зависит от энергии при  $s \rightarrow \infty$ . Область значений быстрой, отвечающих центральной области (5.65), при ограниченных значениях  $p_{c1}$  и при  $s \rightarrow \infty$  определяется неравенствами

$$-\ln[x_0 \sqrt{s}/m_{c1}] \lesssim y_c^* \lesssim \ln[x_0 \sqrt{s}/m_{c1}], \quad (5.66)$$

вытекающими из определений переменных  $x_F$  и  $y_c^*$ . В условиях (5.65), (5.66) области фрагментации ограничиваются неравенствами

$$-1 \lesssim x_F \lesssim -x_0, \quad x_0 \lesssim x_F \lesssim 1, \\ -\ln(\sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y^* \lesssim \ln(x_0 \sqrt{s}/m_{c1}), \quad (5.67)$$

$$\ln(x_0 \sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y_c^* \lesssim \ln(\sqrt{s}/m_{c1}).$$

В отличие от гипотезы предельной фрагментации в данном случае предсказывается логарифмический рост с энергией центральной области быстрой (см. (5.66)):

$$(\Delta y_c^*) \approx 2 \ln(x_0 \sqrt{s}/m_{c1}), \quad (5.68)$$

и постоянство размеров областей фрагментации (см. (5.67)):

$$(\Delta y_c^*) \approx \ln(1/x_0). \quad (5.69)$$

Ширина областей фрагментации в пространстве быстрой приблизительно равна  $\ln(1/x_0) \approx (1-2) \approx l$  [18]. В табл. 1 приводятся сведения о границах центральной области и областей фрагментации первичных частиц  $a$  и  $b$  для двух обсуждавшихся динамических гипотез: верхние неравенства в каждой строке таблицы относятся к гипотезе предельной фрагментации, а нижние — к гипотезе фейнмановского скейлинга.

Из гипотезы фейнмановского скейлинга и требования релятивистской инвариантности функции плотности распределения  $\rho(y_c^*, p_{c1}; s)$  можно сделать важные выводы о характере независимых переменных, определяющих поведение этой функции. Во-первых, фейнмановский скейлинг исключает зависимость  $\rho(y_c^*, p_{c1})$  от энергии первичных частиц  $\sqrt{s}$  в явном виде. Во-вторых, зависимость от быстроты должна быть представлена в форме, инвариантной относительно продольных релятивистских преобразований. Переменную быстроты очень просто представить в инвариантной форме, например, записав вместо  $y_c^*$  разности быстрой  $(y_a^* - y_c^*)$ ,  $(y_c^* - y_b^*)$  первичных частиц и инклюзивной частицы.

Таблица 1

Границы кинематических областей в процессах множественного образования адронов по переменным  $x_F$  и  $y_c^*$  для двух динамических гипотез

| Кинематическая область           | $x_F$                                                                                          | $y_c^*$                                                                                                                        |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Фрагментация частицы $a$         | $\frac{2m_{c1}}{\sqrt{s}} \lesssim x_F \lesssim 1$<br>$x_0 \lesssim x_F \lesssim 1$            | $l \lesssim y_c^* \lesssim \ln(\sqrt{s}/m_{c1})$<br>$\ln(x_0\sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y_c^* < \ln(\sqrt{s}/m_{c1})$            |
| Центральная (область пионизации) | $-2m_{c1}/\sqrt{s} \lesssim x_F \lesssim 2m_{c1}/\sqrt{s}$<br>$-x_0 \lesssim x_F \lesssim x_0$ | $-l \lesssim y_c^* \lesssim l$<br>$-\ln(x_0\sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y_c^* \lesssim \ln(x_0\sqrt{s}/m_{c1})$                   |
| Фрагментация частицы $b$         | $-1 \lesssim x_F \lesssim -2m_{c1}/\sqrt{s}$<br>$-1 < x_F \lesssim x_0$                        | $-\ln(\sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y_c^* \lesssim -l$<br>$-\ln(\sqrt{s}/m_{c1}) \lesssim y_c^* \lesssim -\ln(x_0\sqrt{s}/m_{c1})$ |

В области фрагментации первичной частицы  $a$  следует ожидать, что плотность распределения по быстрой  $y_c^*$  зависит только от разности  $(y_a^* - y_c^*)$  и имеет вид  $\rho(y_a^* - y_c^*, p_{c1})$ . Вместо разности быстрой в Ц-системе можно использовать разность быстрой в Л-системе:  $y_a - y_c = y_a^* - y_c^*$ . От разности  $y_c^* - y_b^*$  плотность распределения в области фрагментации частицы  $a$  зависеть не должна, так как тогда бы она зависела от энергии частицы  $b$ , а по определению в области фрагментации частицы  $a$  могут существовать корреляции только с характеристиками этой частицы. Аналогично, в области фрагментации частицы  $b$  должна наблюдаться зависимость  $\rho(y_c^* - y_b^*, p_{c1})$ , причем разность быстрой можно выразить через быструю инклюзивной частицы в Л-системе:

$$y_c = y_c^* - y_b^* (y_b = \ln[(E_b + p_b)/m_b] = 0, \text{ так как } p_b = 0).$$

Распределения в центральной области быстрой не должны зависеть от характеристик частиц  $a$  и  $b$ . Поскольку только из быстрой частицы  $c$  нельзя составить комбинацию, инвариантную относительно продольных релятивистских преобразований, приходим к выводу, что в центральной области плотность распределения  $\rho(y_c^*, p_{c1})$  вообще не должна зависеть от быстрой  $y_c^*$ :  $\rho(y_c^*, p_{c1}) = \rho(p_{c1})$ . Этот результат позволяет заключить, что в рамках гипотезы фейнмановского скейлинга средняя множественность вторичных адронов в центральной области быстрой логарифмически растет с энергией:

$$\langle n_c \rangle = 2\pi \int dy_c^* \int dp_{c1} p_{c1} \rho(p_{c1}) \sim \ln(x_0 \sqrt{s}/m_c). \quad (5.70)$$

Интегрирование по  $p_{c1}$  в (5.70) дает при  $s \rightarrow \infty$  функцию, не зависящую от энергии в силу ограниченности среднего значения  $\langle p_{c1} \rangle$  (интеграл

по  $p_{c1}$  хорошо сходится в области  $p_{c1} \gtrsim \langle p_{c1} \rangle$ ). Интегрирование в (5.70) по  $y_c^*$  определяет ширину центральной области быстрой (5.68) и оценку (5.70). В рамках гипотезы фейнмановского скейлинга области фрагментации дают вклад в среднюю множественность, практически не зависящий от энергии  $\sqrt{s}$ . Это связано с конечностью интервалов быстрой, которые занимают области фрагментации.

Итак, согласно гипотезе фейнмановского скейлинга основной вклад в среднюю множественность вторичных адронов дает центральная область быстрой.

Поскольку основную долю детектируемых адронов составляют пионы (до 80%), центральную область быстрой иногда называют областью пионизации первичных адронов.

Завершая этот раздел, подчеркнем, что гипотезы предельной фрагментации и фейнмановского скейлинга оказали большое влияние на развитие теоретических и экспериментальных исследований физики множественных процессов.

В центральной области распределение по быстрой имеет колоколообразный вид (фейнмановский скейлинг предсказывает широкое плато по быстрой), причем высота этого колокола медленно растет с энергией (см., например, [18, 29]). Связано ли такое поведение с отсутствием фейнмановского скейлинга даже при асимптотически высоких энергиях или, в конце концов, установится такой режим — ответы на эти вопросы не входят в компетенцию кинематики и ждут своего разрешения на основе экспериментальных данных и в рамках детальных динамических теорий.

#### 5.4. Кинематика мультипериферизма

Понятие о мультипериферизме. Из опыта известно, что процессы сильного взаимодействия адронов при высоких энергиях осуществляются, в основном, с малыми передачами энергии и импульса между взаимодействующими частицами с близкими значениями быстрой. Уже давно известно, что в процессах множественного образования адронов средние поперечные импульсы вторичных частиц ограничены и практически не растут с энергией (у вторичных пионов, например,  $\langle p_{\perp} \rangle \approx 0,35$  ГэВ/с). Это обстоятельство наводит на мысль о том, что взаимодействие между адронами (группами адронов) с близкими быстрой (продольными импульсами) осуществляется за счет обмена виртуальными состояниями с небольшими массами (пионами,  $\rho$ -мезонами и т.п.). Согласно принципу неопределенности, малым значениям импульсов, передаваемых в поперечном направлении по отношению к оси соударения первичных адронов, отвечают большие прицельные параметры. Поэтому можно предполагать, что в процессах сильного взаимодействия вторичные адроны (или группы адронов) пространственно разделены в плоскости прицельных параметров на расстояния порядка  $(\langle p_{\perp} \rangle)^{-1}$ .

Эти качественные соображения и приводят к понятию периферичности взаимодействия в процессах множественного образования адронов. Типичная диаграмма периферического процесса представлена на рис. 5.1. На этом

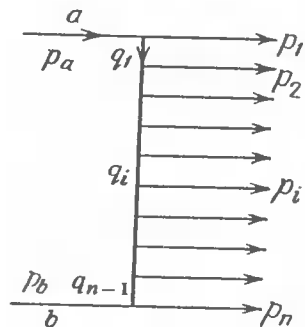


Рис. 5.1. Диаграмма периферического процесса  $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

рисунке условно изображен процесс множественного образования  $n$  адронов в реакции  $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ , указаны 4-импульсы первичных частиц,  $p_a$  и  $p_b$ , вторичных частиц,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а также переданные 4-импульсы  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ . Здесь рассматриваются чисто кинематические характеристики мультипериферических процессов, которые не зависят от конкретных квантовых чисел реальных и виртуальных частиц. В частности, вторичные частицы с 4-импульсами  $p_i$  могут оказаться резонансами, а виртуальные состояния с 4-импульсами могут быть обычными виртуальными адронами, реджеонами или другими образованиями, обмен которыми обеспечивает ограниченность квадратов модулей переданных 4-импульсов  $|q_i^2|$  (см., например, [17, 18]).

Постулаты мультипериферизма. В основе мультипериферического подхода к процессам множественного образования адронов лежат следующие постулаты [18], в большей или меньшей степени реализующиеся в рамках конкретных динамических моделей [36–38].

1. Передачи квадрата модуля 4-импульса между соседними узлами мультипериферической "гребенки" (рис. 5.1) в среднем ограничены независимо от значения первичной энергии  $E_a$ :

$$|q_i^2| \lesssim m^2, \quad (5.71)$$

где  $m$  — параметр с размерностью массы, характеризующий область эффе́ктивных значений  $|q_i^2|$ . При  $|q_i^2| \gtrsim m^2$  функции распространения (пропагаторы) виртуальных частиц и вершинные функции, описывающие испускание реальных адронов, быстро убывают с ростом  $|q_i^2|$ .

2. Процессы испускания реальных адронов (группы адронов) из соседних узлов мультипериферической "гребенки" (рис. 5.1) слабо коррелированы между собой. В предельном варианте мультипериферизма полагается, что испускание вторичных частиц в различных узлах гребенки происходит независимо друг от друга.

3. Энергии  $E_i$  всех частиц (пучков частиц), испущенных из узлов мультипериферической "гребенки" в Л-системе, за исключением, быть может, самых нижних на рис. 5.1, достаточно велики, чтобы их можно было считать релятивистскими:

$$E_i \approx p_{iz} + m_{i1}^2 / (2 p_{iz}). \quad (5.72)$$

Здесь  $p_{iz}$  — продольная компонента импульса  $p_i$ -й частицы (ось  $z$  направлена вдоль импульса  $p_a$  налетающего адрона в Л-системе; адрон  $b$  покоится:  $p_b = 0$ );  $m_{i1}^2 = p_{i1}^2 + m_i^2$ ,  $m_i$  — масса испущенного адрона (адронной струи) в  $i$ -м узле "гребенки",  $p_{i1}$  — его поперечный импульс ( $p_{i1} \perp p_a$ ).

4. Продольные импульсы всех вторичных адронов последовательно убывают от верхней вершины диаграммы рис. 5.1 до нижней:

$$x_i = p_{iz} / p_{(i-1)z} < 1. \quad (5.73)$$

Отношение  $x_i$  не зависит от первичной энергии  $E_a$  для любого номера  $i$  и не обращается в нуль ( $x_i \neq 0$ ). Условия (5.73) эквивалентны следующим неравенствам для быстрот вторичных частиц:

$$y_n < y_{n-1} < \dots < y_1. \quad (5.74)$$

Условия (5.73), (5.74) являются следствиями анализа конкретных динамических моделей [36–38] и соответствуют интуитивным соображениям о последовательном процессе распределения первичной энергии между частицами мультипериферической "гребенки" рис. 5.1 в условиях постулата 1.

Следствия из постулатов мультипериферизма. Постулаты мультипериферизма 1, 3 и 4 накладывают серьезные ограничения на кинематические характеристики вторичных частиц в процессах множественного образования. Постулат 2 является, скорее, динамической гипотезой. Он требует уточнения, если учитывать законы сохранения дискретных квантовых чисел (электрического заряда, странности, барионного заряда и т.п.) при испускании вторичных частиц в узлах мультипериферической "гребенки". Требование локального выполнения этих законов приводит к необходимости рассматривать образование в узлах "гребенки" пар или даже большего числа вторичных адронов с противоположными квантовыми числами.

Во всяком случае, постулат 2 фиксирует закон распределения по числу узлов мультипериферической "гребенки". В силу независимости процессов испускания вторичных адронов в соседних узлах это распределение подчиняется закону Пуассона:

$$\mathcal{P}(n) = \exp(-\langle n \rangle) (\langle n \rangle)^n / n!, \quad (5.75)$$

где  $\langle n \rangle$  — среднее число узлов испускания вторичных частиц или средняя множественность вторичных частиц, если в каждом узле "гребенки" испускается только один вторичный адрон.

Из кинематических постулатов 1, 3, 4 вытекают выводы об ограниченности средних поперечных импульсов и эффе́ктивных масс пар частиц, образовавшихся в соседних узлах "гребенки" рис. 5.1. Докажем эти результаты.

Для этого представим величину  $|q_i^2|$  в виде

$$|q_i^2| = -\left(p_a - \sum_{k=1}^i p_k\right)^2. \quad (5.76)$$

Представление (5.76) получается на основе законов сохранения энергии и

импульса, согласно которым (рис. 5.1)  $p_a = \sum_{k=1}^i p_k + q_i$ . Обозначим сум-

му поперечных импульсов  $\sum_{k=1}^i p_{k\perp} = \kappa_i$  и раскроем инвариант (5.76)

через энергетические, продольные и поперечные компоненты импульсов:

$$|q_i^2| = \kappa_i^2 - (E_a - \sum_{k=1}^i E_k)^2 + (p_a - \sum_{k=1}^i p_{kz})^2 = \\ = \kappa_i^2 - [E_a + p_a - \sum_{k=1}^i (E_k + p_{kz})][E_a - p_a - \sum_{k=1}^i (E_k - p_{kz})].$$

Используя приближенные выражения  $E_a + p_a \approx 2p_a$ ,  $E_k + p_{kz} \approx 2p_{kz}$ ,  $E_a - p_a \approx m_a/2p_a$ ,  $E_k - p_{kz} \approx m_{k\perp}^2/2p_{kz}$  (см. постулат 3) и применяя постулат 4, находим

$$|q_i^2| = \kappa_i^2 - (1 - x_1 - x_1 x_2 - \dots - \prod_{k=1}^i x_k) \times \\ \times (m_a^2 - m_{1\perp}^2/x_1 - \dots - m_{i\perp}^2 / \prod_{k=1}^i x_k). \quad (5.77)$$

Так как величины  $|q_i^2|$ ,  $m_i^2$  и  $x_i < 1$  ( $x_i \neq 0$ ) ограничены независимо от первичной энергии  $E_a$ , то, рассматривая последовательно все равенства (5.77), начиная с  $i = 1$ , убеждаемся в ограниченности в среднем всех поперечных импульсов  $|p_{i\perp}|$  по модулю. Если в узле мультипериферической "гребенки" испускается несколько частиц, то вывод об ограниченности поперечных импульсов каждой совокупности таких частиц остается справедливым, если их эффективная масса  $m_i$  также ограничена.

Эффективная масса двух частиц, излученных в соседних узлах мультипериферической "гребенки" (рис. 5.1), выражается формулой

$$s_{i,i-1} = (p_i + p_{i+1})^2 \approx (1 + x_{i+1})[m_{i\perp}^2 + m_{(i+1)\perp}^2/x_{i+1}] - (p_{i\perp} + p_{(i+1)\perp})^2 \quad (5.78)$$

и не увеличивается с ростом первичной энергии  $E_a$  в силу ограниченности  $x_{i+1}$ ,  $|p_{i\perp}|$  ( $m_{i\perp}$ ).

Распределение по быстрой и множественность вторичных частиц в мультипериферизме. Рассмотрим разность быстрой вторичных частиц, испускаемых в соседних узлах мультипериферической "гребенки" (рис. 5.1):

$$\Delta y_i = y_{(i+1)} - y_i \approx \ln[x_{(i+1)} m_{i\perp}/m_{(i+1)\perp}]. \quad (5.79)$$

При выводе (5.79) использована приближенная формула

$$y_i = \ln[(E_i + p_{iz})/m_{i\perp}] \approx \ln(2 p_{iz}/m_{i\perp})$$

и соотношение  $p_{(i+1)z}/p_{iz} = x_{(i+1)}$ . Из результата (5.79) вытекает вывод об ограниченности в среднем быстрого интервала между соседними частицами мультипериферической "гребенки" и независимости его от первичной энергии, поскольку величины  $x_{(i+1)}$ ,  $x_{i\perp}$  и  $m_{(i+1)\perp}$  также ограничены. Различные интервалы быстрой  $\Delta y_i$  должны быть в среднем примерно одинаковыми, поскольку в силу постулата 1 условия передачи энергии и импульса между соседними узлами "гребенки" примерно одинаковы вдоль всей "гребенки". Небольшие флуктуации в величинах  $x_i$  и  $m_{i\perp}$  нивелируются под знаком логарифма в правой части формулы (5.79).

Поэтому в рамках мультипериферического подхода следует ожидать однородного распределения вторичных частиц по быстрой в процессах множественного образования:

$$dn/dy = \text{const}. \quad (5.80)$$

Свойство однородности нарушается вблизи кинематических границ по переменной быстрой. В Л-системе верхняя граница быстрого спектра принимает значение

$$y_{\max} = y_{\max}^* + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) \approx \ln \left( \frac{2 p_a}{m_{\perp}} \right),$$

а нижняя — значение

$$y_{\min} = -y_{\min}^* + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) \approx \ln \left( \frac{m_{\perp}}{m_b} \right),$$

где  $v = p_a/(E_a + m_b)$ ,  $m_{\perp}$  — поперечная масса основного сорта вторичных частиц, испускаемых в узлах мультипериферической "гребенки". Значения  $y_{\max}$ ,  $y_{\min}$  здесь оценены в ультрарелятивистском пределе ( $E_a \gg m_a, m_b, m_{\perp}$ ). Величина  $y_{\max}$  отвечает случаю, когда самая быстрая вторичная частица уносит практически весь импульс первичной частицы. Естественно, что такие события осуществляются чрезвычайно редко, и поэтому в окрестности правой границы кинематического интервала быстрого свойства (5.80) выполняться не может. В силу "трансляционной" инвариантности быстрого спектра относительно релятивистских преобразований из одной системы отсчета в другую форма этого спектра, включая и окрестности его кинематических границ, должна оставаться неизменной. Поэтому переход в АЛ-систему позволяет полностью повторить предыдущий вывод для левой границы быстрого интервала.

Из результата (5.80) вытекает логарифмический рост средней множественности с энергией

$$\langle n \rangle = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (dn/dy) dy = A' \ln(2 p_a/m_b) + B', \quad (5.81)$$

где  $A'$  и  $B'$  — постоянные величины. Выражение (5.81) можно представить в виде  $\langle n \rangle = A \ln(\sqrt{s}/m) + B$ , где  $m$  — масса вторичной частицы,  $A, B$  —

постоянные. В такой форме записи предсказание мультипериферической кинематики (5.81) совпадает с полуинтуитивной оценкой (5.70), основанной на гипотезе фейнмановского скейлинга и требовании релятивистской ковариантности плотности распределения вторичных частиц по быстротам в центральной области (см. раздел 5.3). Логарифмический рост с энергией  $\sqrt{s}$  средней множественности вторичных частиц является следствием предсказания (5.80) о существовании плато в плотности распределения адронов в центральной области быстрой.

Экспериментальные данные (см., например, [18, 29]) во многом качественно согласуются с общими предсказаниями мультипериферизма, которые здесь обсуждались. Однако имеются и заметные расхождения, которые удается преодолеть в динамических моделях, описывающих процессы образования сразу нескольких "ребенок" мультипериферического типа. К таким теоретическим построениям относится, в частности, модель многопомеронных \*) обменов, основанная на методе комплексных моментов (см., например, [18]) или гидродинамическая теория множественных процессов (см. гл. 6).

Подчеркнем, что масштабноинвариантные свойства мультипериферических распределений были установлены задолго до выдвижения гипотезы скейлинга инклюзивных спектров [36]. В последнее время мультипериферическая модель широко используется в качестве наглядного представления кварк-партоновой структуры нуклонов, обнаруженной в конце 60-х гг. (см., например, [17–18, 28, 39–40]). Относительная простота и физическая ясность мультипериферической кинематики и ее качественное соответствие экспериментальным данным являются ценными свойствами мультипериферического подхода.

### 5.5. Инклюзивное образование тяжелых частиц с последующим двухчастичным распадом

В данном разделе рассматривается часто встречающийся на практике пример, связанный с поисками и идентификацией процессов образования и последующего распада по двухчастотному каналу тяжелых нестабильных частиц. Речь идет об инклюзивных реакциях вида (5.2), где нестабильная частица  $c$  распадается по каналу

$$c \rightarrow 1 + 2. \quad (5.82)$$

К реакциям такого рода относятся, например, процессы образования тяжелых псевдоскалярных мезонов  $D^\pm$ ,  $F^\pm$ , имеющих каналы распадов

$$D^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu), \quad F^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu),$$

а также каналы с образованием  $\tau^\pm$ -лептонов:

$$D^\pm \rightarrow \tau^\pm + \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau), \quad F^\pm \rightarrow \tau^\pm + \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau),$$

\*) Померон-обменное виртуальное состояние с квантовыми числами вакуума за исключением спина, который может принимать различные значения  $\alpha(t)$  в зависимости от квадрата 4-импульса  $q^2 = t$ , переисомного этим образованием. При  $t = 0$  значение  $\alpha(0)$  несколько превышает единицу. Померон является главной разновидностью реджеонов (виртуальных частиц с переменным комплексным спином).

процессы образования  $W^\pm$ -бозонов с последующими распадами по лептонным каналам

$$W^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu), \quad e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$$

и целый ряд других процессов, в которых одна из вторичных частиц не детектируется (нейтрино в приведенных примерах), а детектирование трека нестабильной частицы либо затруднено, либо вообще невозможно, как в случае с  $W^\pm$ -бозонами из-за слишком малого времени жизни. В таких условиях идентификация процесса (5.2) все же возможна на основе изучения распределения одного из продуктов распада (5.82) по поперечному импульсу  $p_{1\perp}$ , измеренному относительно направления оси соударения первичных частиц  $a$  и  $b$ , как будет показано ниже. Главным условием успешного наблюдения подобного каскада реакций является эллипсоидальность распределения инклюзивных нестабильных частиц сорта  $c$  в Ц-системе процесса (5.2) (вытянутость в направлениях вперед и назад).

Инвариантное дифференциальное сечение образования инклюзивных тяжелых частиц в реакции (5.2) представляется в следующей факторизованной форме:

$$E_c(d^3\sigma/d^3p_c) = f(E_c^*/(E_c^*)_{\max}) \exp(-bp_{c\perp}^2), \quad (5.83)$$

где  $E_c^*$  — энергия частицы  $c$  в Ц-системе реакции,  $(E_c^*)_{\max}$  — ее максимально возможное значение (см. (5.23)),  $p_{c\perp} = p_c^* \sin \theta_c^*$  — модуль поперечного импульса частицы  $c$ ,  $p_c^* = |p_c^*|$ ,  $\theta_c^*$  — модуль импульса и угол вылета этой частицы в Ц-системе. Параметризация инклюзивного дифференциального сечения реакции (5.2) в формуле (5.83) носит иллюстративный характер. Она отражает главные качественные черты распределений инклюзивных частиц по поперечным импульсам (ограниченность  $\langle p_{c\perp} \rangle$  и быстрое падение плотности распределения с ростом  $p_{c\perp}$  от нуля вплоть до значений  $p_{c\perp} \approx (1,5 - 2)$  ГэВ/с). Распределение по продольной безразмерной переменной  $x_E = E_c^*/(E_c^*)_{\max}$  в (5.83) имеет скейлинговый характер, но может зависеть от первичной энергии  $\sqrt{s}$ . Переменную  $x_E$  можно заменить на  $x_F$  или  $x_+$ , не утрачивая общности дальнейшего рассмотрения. Вместо гауссовского распределения в (5.83) можно использовать экспоненциальную параметризацию вида  $\exp(-bp_{1\perp})$  или степенную типа  $(1 + bp_{1\perp}^2)^{-n}$ .

Параметризация (5.83) позволяет провести анализ проблемы в более наглядной форме. При проведении анализа конкретных реальных физических ситуаций следует использовать все имеющиеся сведения об инвариантном дифференциальном сечении инклюзивного процесса (5.2) и те параметризации, которые наиболее верно отражают данные опыта. При решении поставленной задачи на основе распределения (5.83) здесь преследуется качественная цель — проследить в явной форме преобразование спектра инклюзивной нестабильной частицы  $c$  в спектр одного из продуктов ее двухчастичного распада (5.82). При использовании параметризации (5.83) предполагается также, что функция  $f(x_F)$  достаточно быстро убывает с ростом  $x_E$  и обращается в нуль на кинематическом пределе, когда  $x_E = 1$ .

В отсутствие спиновых переменных или спиновых корреляций угловое распределение продуктов двухчастичного распада (5.82) в системе покоя



нестабильной частицы с изотропно (см. (2.10)). Распределение (2.10) можно представить в следующей инвариантной форме:

$$dw = \frac{m}{2\pi p_1^*} \delta[2(p_c p_1) - 2m_c E_1^*] \frac{d^3 p_1}{E_1}, \quad (5.84)$$

где  $p_1$  — 4-импульс одного из продуктов распада (5.82),  $p_1^* = |p_1^*|$ ,  $E_1^*$  — модуль импульса этой частицы и ее энергия в системе покоя частицы  $c$ :

$$E_1^* = (m_c^2 + m_1^2 - m_2^2)/2m_c, \quad p_1^* = [(E_1^*)^2 - m_1^2]^{1/2}.$$

С помощью  $\delta$ -функции в (5.84) можно провести интегрирование по энергии  $E_1^*$  и получить в результате изотропное угловое распределение (2.10). При этом скалярное произведение 4-векторов  $(p_c p_1)$  надо выразить через массы частиц, используя законы сохранения энергии и импульса в распаде (5.82):  $(p_c - p_1)^2 = p_2^2 = m_2^2$ . Из такой операции следует, что  $2(p_c p_1) = m_c^2 + m_1^2 - m_2^2$ . Отметим, что распределение (5.84) нормировано на единицу ( $w = 1$ ). В отсутствие корреляций между спином частицы  $c$  и импульсами продуктов распада инвариантное дифференциальное сечение образования частицы 1 в каскаде процессов (5.2), (5.82) находится простым перемножением распределений (5.83) и (5.84):

$$\frac{E_1 d^3 \sigma}{d^3 p_1} = \frac{\beta m_c}{2\pi p_1^*} \int \frac{d^3 p_c}{E_c} f(x_E) e^{-b p_{c1}^2} \delta(2(p_c p_1) - 2m_c E_1^*). \quad (5.85)$$

Множитель  $\beta$  в правой части равенства (5.85) учитывает относительную вероятность распада частицы  $c$  по каналу (5.82). Интегрирования в (5.85) проводятся по всем компонентам импульса  $p_c$  частицы  $c$  при фиксированном значении импульса  $p_1$  частицы 1. Напомним, что в отсутствие отмеченного выше условия фиксированности вектора  $p_1$ , в Ц-системе реакции (5.2) угол вылета частицы изменяется в пределах  $0 \leq \theta_c^* \leq \pi$ , а энергия  $E_c^*$  — в области, ограниченной неравенствами  $m_c \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}$  (см. (5.23)).

Будем обозначать энергию и импульс частицы 1 в Ц-системе реакции (5.2) символами  $E_1, p_1$ . В выражении (5.85) под знаком интегрирования имеется  $\delta$ -функция, отражающая действие законов сохранения энергии и импульса в распаде (5.82). Раскроем ее аргумент в Ц-системе реакции (5.2):

$$2(p_c p_1) - 2m_c E_1^* = 2E_c^* E_1 - 2p_c^* p_1 \cos \theta' - 2m_c E_1^*. \quad (5.86)$$

Здесь  $E_c^*, p_c^*$  — энергия и модуль импульса частицы  $c$  в Ц-системе реакции (5.2),  $\theta'$  — угол между векторами  $p_c^*$  и  $p_1$  в этой же системе отсчета. Выберем декартову систему координат в Ц-системе реакции (5.2) таким образом, чтобы вектор  $p_1$  был направлен вдоль оси  $z$ , а импульс первичной частицы  $p_a$  находился в плоскости  $(x, z)$  (рис. 5.2). Обозначим через  $\theta_1$  угол между векторами  $p_a^*$  и  $p_1$ . Тогда углы  $\theta, \theta'$ , азимутальный угол  $\varphi'$  вектора  $p_c^*$  (рис. 5.2) и угол вылета частицы  $c$  ( $\theta_c^*$ ) по отношению к направлению вектора  $p_a$  связаны между собой по теореме косинусов:

$$\cos \theta_c^* = \cos \theta' \cos \theta_1 + \sin \theta' \sin \theta_1 \cos \varphi'. \quad (5.87)$$

Представим релятивистский фазовый объем частицы  $c$  в сферических координатах, представленных на рис. 5.2:

$$d^3 p_c / E_c = p_c^* dE_c^* d \cos \theta' d\varphi'.$$

Провести интегрирование по  $\cos \theta'$  в (5.85) можно с помощью  $\delta$ -функции, аргумент которой (5.86) обращается в нуль при значении

$$\cos \theta' = (E_c^* E_1 - m_c E_1^*) / p_c^* p_1. \quad (5.88)$$

Результат интегрирования представляется в виде

$$\frac{E_1 d^3 \sigma}{d^3 p_1} = \frac{\beta m_c}{4\pi p_1^* p_1} \int dE_c^* \int_0^{2\pi} d\varphi' f(x_E) \exp(-b p_{c1}^2), \quad (5.89)$$

где  $p_{c1}^2 = p_c^{*2} \sin^2 \theta_c^*$ . Выражая  $\cos \theta_c^*$  через  $\theta_1, \theta'$  и  $\varphi$  по формуле (5.87) и подставляя вместо  $\cos \theta'$  его значение (5.88), получаем

$$p_{c1}^2 = (p_c^*)^2 \{1 - [z' \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sqrt{1 - (z')^2} \cos \varphi']^2\}, \quad (5.90)$$

где  $z' = (E_c^* E_1 - m_c E_1^*) / p_c^* p_1$  (см. (5.88)). Пределы интегрирования в (5.89) по  $\varphi'$  очевидны:  $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$ , а пределы интегрирования по энергии  $E_c^*$  частицы  $c$  еще следует определить. Так как соотношение (5.88) содержит эту переменную, а допустимые значения  $\cos \theta'$  ограничены неравенством

$$|\cos \theta'| = |E_c^* E_1 - m_c E_1^*| / p_c^* p_1 \leq 1, \quad (5.91)$$

то, разрешая это неравенство, находим допустимые пределы изменения энергии  $E_c^*$ :

$$m_c(E_1 E_1^* - p_1 p_1^*) / m_1^2 \leq E_c^* \leq m_c(E_1 E_1^* + p_1 p_1^*) / m_1^2. \quad (5.92)$$

Нижний предел для  $E_c^*$  в (5.92) всегда удовлетворяет условию  $m_c(E_1 E_1^* - p_1 p_1^*) / m_c^2 \geq m_c$  или  $E_1 E_1^* \geq m_1^2 + p_1 p_1^*$ , которое легко доказывается возведением в квадрат обеих частей неравенства. Такая процедура приводит к неравенству  $(p_1^2 E_1 - p_1 E_1^*)^2 \geq 0$ . Поэтому нижняя граница изменения энергии  $E_c^*$  определяется неравенством (5.92), а не условием  $E_c^* \geq m_c$ . Верхняя граница для энергии  $E_c^*$  не должна превышать предельно возможного значения  $(E_c^*)_{\max}$  в реакции (5.2), которое определяется по формуле (5.23):

$$m_c(E_1 E_1^* + p_1 p_1^*) / m_1^2 \leq (E_c^*)_{\max} = (s + m_c^2 - m_0^2) / 2\sqrt{s}.$$

Это неравенство выполняется, если энергия частицы 1 в Ц-системе реакции (5.2) изменяется в следующих пределах:

$$m_1 \leq E_1 \leq (E_1^* (E_c^*)_{\max} - p_1^* (p_c^*)_{\max}) / m_c. \quad (5.93)$$

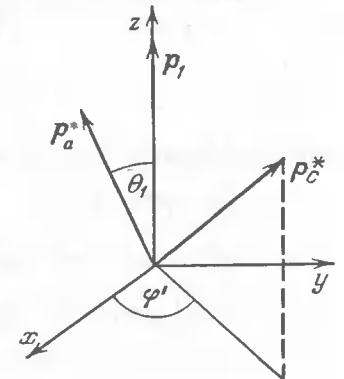


Рис. 5.2. Декартова система координат в Ц-системе реакции (5.2) и сферические координаты  $\theta', \varphi'$  вектора  $p_c^*$ :  $\theta_1$  — угол между векторами  $p_1$  и  $p_a^*$

При выполнении условий (5.93) пределы интегрирования по  $E_c^*$  в формуле (5.89) определяются неравенствами (5.92).

Если же значение  $(E_c^*)_{\max}$  заключено в пределах

$$m_c(E_1 E_1^* - p_1 p_1^*)/m_1^2 \leq (E_c^*)_{\max} \leq m_c(E_1 E_1^* + p_1 p_1^*)/m_1^2,$$

то пределы интегрирования в формуле (5.89) по  $E_c^*$  определяются неравенствами

$$m_c(E_1 E_1^* - p_1 p_1^*)/m_1^2 \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}. \quad (5.94)$$

Энергия частицы 1 в Ц-системе реакции (5.2) при выполнении ограничений (5.94) изменяется в пределах

$$(E_1^*(E_c^*)_{\max} - p_1^*(p_c^*)_{\max})/m_c \leq E_1 \leq m_c^{-1}(E_1^*(E_c^*)_{\max} + p_1^*(p_c^*)_{\max}). \quad (5.95)$$

Чтобы не загромождать изложение чрезмерно сложными формулами, сделаем упрощающее предположение, которое естественно в случае распада тяжелой частицы на очень легкие. А именно: пренебрежем массами частиц 1 и 2 по сравнению с массой частицы  $c$  ( $m_c \gg m_1, m_2$ ). Тогда в интеграле (5.89) остается только одна область интегрирования:

$$E_1 + m_c^2/4E_1 \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}. \quad (5.96)$$

При этом энергия частицы 1 изменяется в Ц-системе в пределах

$$[(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}]/2 \leq E_1 \leq [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}]/2. \quad (5.97)$$

Если  $(E_c^*)_{\max} \gg m_c$ , то пределы (5.97) упрощаются:

$$m_c^2/4(E_c^*)_{\max} \leq E_1 \leq (E_c^*)_{\max}.$$

Рассмотрим вместо переменной  $E_c^*$  безразмерную переменную  $x$ :

$$x = (4E_1 E_c^* - 4E_1^2 - m_c^2)/4E_1^2. \quad (5.98)$$

С учетом ограничений (5.96) переменная  $x$  изменяется в пределах

$$0 \leq x \leq ((E_c^*)_{\max}/E_1 - 1 - m_c^2/4E_1^2). \quad (5.99)$$

Заменяя переменную  $E_c^*$  на  $x$  и учитывая, что при  $m_c \gg m_1, m_2$  имеют место приближенные соотношения  $E_1^* \approx p_1^* \approx m_c/2$ ,  $E_1 \approx p_1$ , можно представить распределение (5.89) в виде

$$\frac{E_1 d^3 \sigma}{d^3 p_1} = \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{x_M} dx f(x_E) \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp(-bp_c^2). \quad (5.100)$$

В формуле (5.100) использованы следующие обозначения:

$$x_M = [4E_1(E_c^*)_{\max} - 4E_1^2 - m_c^2]/4E_1^2,$$

$$x_E = [4E_1(1+x) + m_c^2]/4E_1(E_c^*)_{\max},$$

$$p_{c1}^2 = p_{11}^2(1 - m_c^2/4E_1^2)^2 + p_{11}^2 x^2 + 2p_{11}^2 x + m_c^2 x \cos^2 \theta_1 - (1/2)m_c^2 x \sin^2 \theta_1 \cos 2\varphi' - 2m_c p_{11} \sqrt{x} (4E_1^2(1+x) - m_c^2) \cos \theta_1 \cos \varphi'/4E_1^2. \quad (5.101)$$

Последняя формула для  $p_{c1}^2$  получена на основе (5.90) после подстановки значений  $z'$  по формуле (5.88),

$$E_c^* = (1+x)E_1 + m_c^2/4E_1,$$

$$p_{11} = p_1 \sin \theta_1 \approx E_1 \sin \theta_1, \quad (p_c^*)^2 = (E_c^*)^2 - m_c^2.$$

От азимутального угла  $\varphi'$  под знаком интеграла (5.100) зависит только величина  $p_{c1}^2$ . Эту зависимость можно представить, согласно (5.101), в следующем виде:

$$\exp[A(x, \theta_1) \cos 2\varphi' + B(x, \theta_1) \cos \varphi'].$$

Оценить интеграл по  $\varphi'$  от такой функции можно следующим образом. Заметим, что функция  $B(x, \theta_1)$  обращается в нуль при  $\theta = \pi/2$  и при  $\theta_1 = 0$  и пренебрежем этим слагаемым в показателе экспоненты. После этого интеграл по  $\varphi'$  вычисляется точно [41]:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \exp(A \cos 2\varphi') = 2\pi I_0(A), \quad (5.102)$$

где  $I_0(A)$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $A = (b/2)m_c^2 x \sin \theta_1$ .

В результате приближенного интегрирования по  $\varphi'$  приходим к результату

$$\begin{aligned} \frac{E_1 d^3 \sigma}{d^3 p_1} &= \beta \exp \left[ -bp_{11}^2 \left( 1 - \frac{m_c^2}{4E_1^2} \right)^2 \right] \times \\ &\times \int_0^{x_M} dx \exp[-b(p_{11}^2 x^2 + 2p_{11}^2 x + m_c^2 x \cos^2 \theta_1)] \times \\ &\times I_0 \left( \frac{1}{2} b m_c^2 x \sin^2 \theta_1 \right) f(x_E). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Подынтегральная функция в (5.103) максимальна вблизи нижнего предела и быстро убывает с ростом  $x$ . При  $x \rightarrow 0$

$$I_0(0) \rightarrow 1, \quad f(x_E) \rightarrow f[(4E_1^2 + m_c^2)/4E_1(E_c^*)_{\max}].$$

Вынося эти функции из-под знака интеграла (5.103) в точке  $x = 0$  и пренебрегая квадратичным по  $x$  слагаемым в экспоненте, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} E_1 d^3 \sigma / d^3 p_1 &\approx \beta \exp[-bp_{11}^2(1 - m_c^2/4E_1^2)^2] \times \\ &\times f[(4E_1^2 + m_c^2)/4E_1(E_c^*)_{\max}] [b(2p_{11}^2 + m_c^2 \cos^2 \theta_1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Приближенная формула (5.104) неплохо согласуется с результатами численных расчетов интегралов во всей области значений углов вылета  $\theta_1$  частицы 1 в Ц-системе. Если частицы сорта 1 наблюдаются под углом  $\theta_1 = 90^\circ$  в Ц-системе реакции (5.2), то распределение (5.104) по  $p_{11} = E_1$  имеет максимум в точке  $p_{11} = m_c/2$ . Этот максимум увеличивается с вытянутостью углового распределения нестабильных инклюзивных частиц сорта  $c$  в направлениях вперед — назад. Эта вытянутость зависит от параметра  $b$  и усиливается с его ростом. Максимум распределения (5.104) вблизи значения  $p_{11} \approx m_c/2$  находится в довольно широкой окрестности

значений угла вылета  $\theta_1$ . В области значений  $60^\circ \lesssim \theta_1 \lesssim 120^\circ$  положение максимума отличается от величины  $m_c/2$  не более чем на (10 – 15)%.

В области значений  $p_{1\perp} \gg m_c/2$  распределение (5.104) повторяет по форме распределение родительской частицы (5.83) с точностью до множителя  $p_{1\perp}^2$ , который несколько увеличивает скорость падения распределения (5.104) с ростом  $p_{1\perp}$  по сравнению с (5.83).

Рассмотренный пример демонстрирует проявление в виде максимума особенности якобиана преобразования от углового распределения в двухчастичном распаде в системе покоя нестабильной частицы к распределению по поперечным импульсам продукта распада (см. раздел 2.5).

Измерение поперечного импульса продукта распада относительно оси соударения частиц, порождающих нестабильную частицу в инклюзивной реакции (5.2), размывает корневую особенность (2.79), превращая ее в максимум.

Отмеченные выше качественные свойства распределений продуктов двухчастичного распада тяжелых нестабильных частиц по поперечному импульсу  $p_{c\perp}$ , измеренному относительно направления оси соударения первичных частиц в процессе (5.2), подтверждаются многочисленными расчетами дифференциальных сечений каскада процессов типа (5.2), (5.82) в конкретных физических ситуациях (см., например, [12–16]).

#### 5.6. Кинематика инклюзивного образования тяжелых частиц с последующим трехчастичным распадом

Обнаружение процесса образования инклюзивной тяжелой частицы  $c$  в реакции (5.2) становится очень сложной задачей, если она обладает сравнительно малым временем жизни, не позволяющим регистрировать ее трек, и испытывает многочастичный распад, не все продукты которого детектируются. Рассмотрим в качестве примера трехчастичный распад такой частицы:

$$c \rightarrow 1 + 2 + 3. \quad (5.105)$$

Примерами подобных ситуаций могут служить процессы полуплептонных распадов очарованных мезонов:

$$D^\pm \rightarrow \bar{K}^0(K^0) + l^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e),$$

$$D^0(\bar{D}^0) \rightarrow K^-(K^+) + l^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e),$$

распады гипотетических тяжелых лептонов  $M^{\pm,0}$  с мюонными (или электронными) квантовыми числами:

$$M^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \quad M^0 \rightarrow \mu^- + \mu^+(l^+) + \nu_\mu(\nu_l),$$

распады  $\tau^\pm$ -лептонов:

$$\tau^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l) + \bar{\nu}_\tau(\nu_\tau).$$

В приведенных примерах обозначение  $l^\pm$  употребляется как общий символ для мюонов  $\mu^\pm$  и электронов  $e^\pm$ . Образование очарованных мезонов может осуществляться в процессах адрон-нуклонных взаимодействий, в глубоко-неупругих лептон-нуклонных или фотон-нуклонных взаимодействиях. Образование гипотетических тяжелых лептонов  $M^{\pm,0}$  может происходить

в пучках мюонных нейтрино (см., например, [19, 24]). Процесс образования  $\tau^\pm$ -лептонов в пучках мюонных нейтрино запрещен законом сохранения лептонных квантовых чисел. Однако если осуществляются процессы перехода одних сортов нейтрино в другие (так называемые нейтринные осцилляции, см., например, [11]), то такой процесс, в принципе, возможен. Его обнаружение явилось бы крупным открытием в физике нейтрино.

Приведенные примеры распадов относятся к трудно детектируемым на опыте, поскольку среди продуктов распада имеется одно или два недетектируемых нейтрино. Дополнительные практические трудности могут возникать также в связи с проблемами детектирования долгоживущих и короткоживущих нейтральных каонов и идентификацией заряженных каонов.

Рассмотрим кинематику каскада процессов (5.2), (5.105) в условиях, когда среди продуктов распада (5.105) детектируется только частица 1 и не наблюдается трек нестабильной частицы  $c$ . Пусть инвариантное дифференциальное сечение образования инклюзивной частицы  $c$  задано в виде некоторой функции от ее кинематических переменных в Ц-системе реакции (5.2):

$$E_c d^3\sigma_c/d^3p_c = F(p_c, s). \quad (5.106)$$

В разделе 3.4 показано существование максимума в распределении по  $p_{1\perp}$  в условиях, когда этот поперечный импульс измеряется относительно направления импульса  $p_c$  частицы. В изложенной выше постановке задачи это направление считается неизвестным.

Пусть инклюзивное распределение частиц сорта 1 в распаде (5.105) задано в форме

$$E_1 d^3w/d^3p_1 = \chi(s_{23}), \quad (5.107)$$

где функция  $\chi(s_{23})$  зависит от квадрата эффективной массы частиц 2 и 3 в распаде (5.105). Инвариант  $s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (p_c - p_1)^2$  выражается через кинематические характеристики нестабильной частицы  $c$  и одного из продуктов распада. В отсутствие спиновых корреляций формула (5.107) является общей формулой для случая одночастичного распределения в трехчастичном распаде. Вероятность распада частицы  $c$  по каналу (5.105) будем считать нормированной на относительную вероятность данного канала:

$$w = \int \chi(s_{23}) \frac{d^3p_1}{E_1} = \beta.$$

Дифференциальное сечение инклюзивного образования частицы 1 в каскаде процессов (5.2), (5.105) находится в отсутствие спиновых корреляций перемножением выражений для  $d\sigma$  и  $dw$ :

$$\frac{E_1 d\sigma}{d^3p_1} = \int \frac{d^3p_c^*}{E_c^*} F(p_c^*, s) \chi(s_{23}). \quad (5.108)$$

Интегрирование в (5.108) проводится по всем компонентам импульса  $p_c$  в пределах, вытекающих из законов сохранения энергии и импульса в

процессах (5.2) и (5.105), при фиксированном импульсе  $p_1$  частицы 1. Пределы интегрирования в (5.108) наиболее просто определяются в Ц-системе реакции (5.2), где при произвольных значениях импульса  $p_1^*$  угол вылета частицы  $c$  относительно оси соударения первичных частиц  $a$  и  $b$  изменяется в пределах  $0 \leq \theta_c^* \leq \pi$ , а энергия  $E_c^*$  изменяется в области значений  $m_c \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}$  (см. (5.23)). Поэтому в правой части формулы (5.108) кинематические переменные отмечены звездочкой.

Фиксирование импульса  $p_1^*$  вносит дополнительные ограничения на пределы изменения кинематических характеристик частицы  $c$ . Эти ограничения вытекают из неравенств ( $m_{1,2,3}$  — массы частиц в распаде (5.105))

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} = (p_c - p_1)^2 \leq (m_c - m_1)^2, \quad (5.109)$$

устанавливающих пределы изменения инварианта  $s_{23}$  в распаде (5.105). Раскрывая инвариант  $s_{23}$  в Ц-системе реакции (5.2), приходим к следующим неравенствам, эквивалентным (5.109):

$$m_c m_1 \leq E_c^* E_1^* - p_c^* p_1^* \cos \theta' \leq [m_c^2 + m_1^2 - (m_3 + m_2)^2] / 2,$$

где  $\theta'$  — угол между векторами  $p_c^*$  и  $p_1^*$ . Для простоты ограничимся анализом случая, когда массы частиц 1, 2, 3 малы по сравнению с массой нестабильной частицы  $c$  ( $m_1, m_2, m_3 \ll m_c$ ). Тогда имеем неравенства

$$0 \leq E_c^* E_1^* - p_c^* p_1^* \cos \theta' \leq m_c^2 / 2, \quad (5.110)$$

среди которых левое всегда выполняется, а правое ограничивает значения  $\cos \theta'$  снизу:

$$\cos \theta' \geq (2E_c^* E_1^* - m_c^2) / 2p_c^* p_1^*. \quad (5.111)$$

В формуле (5.111) можно заменить  $p_1^*$  на  $E_1^*$ , поскольку масса частицы 1 здесь пренебрежимо мала. Ограничение (5.111) имеет физический смысл лишь в том случае, когда выполняются неравенства

$$-1 \leq (2E_c^* E_1^* - m_c^2) / 2p_c^* E_1^* \leq 1, \quad (5.112)$$

поскольку величина  $\cos \theta'$  может изменяться в пределах  $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$ . При выполнении (5.112) значения  $\cos \theta'$  ограничены неравенствами

$$(2E_c^* E_1^* - m_c^2) / 2p_c^* E_1^* \leq \cos \theta' \leq 1. \quad (5.113)$$

Разрешая неравенства (5.112) относительно  $p_c^*$ , находим

$$p_c^* \geq E_1^* - m_c^2 / 4E_1^*. \quad (5.114)$$

Из требования  $p_c^* \geq 0$  заключаем, что неравенство (5.114) имеет физический смысл, если  $E_1^* > m_c^2 / 2$ . В противном случае ( $E_1^* < m_c^2 / 2$ ) следует заменить неравенство (5.114) на условие  $p_c^* \geq 0$ . Значение  $p_c^*$  сверху ограничено кинематикой процесса (5.2):

$$p_c^* \leq (p_c^*)_{\max} = [(E_c^*)_{\max}^2 - m_c^2]^{1/2}.$$

Пределы изменения энергии  $E_c^*$  следуют из соотношения (5.113):

$$E_1^* + m_c^2 / 4E_1^* \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}. \quad (5.115)$$

Энергия частицы  $E_1^*$  заключена в пределах

$$\frac{1}{2} [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}] \leq E_1^* \leq \frac{1}{2} [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}]. \quad (5.116)$$

В терминах импульсной переменной  $p_c^*$  неравенствам (5.115), (5.116) соответствуют следующие области изменений:

$$\begin{aligned} E_1^* - m_c^2 / 4E_1^* &\leq p_c^* \leq (p_c^*)_{\max}, \\ m_c / 2 &\leq \tilde{E}_1^* \leq [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}] / 2, \\ m_c^2 / 4E_1^* - E_1^* &\leq p_c^* \leq (p_c^*)_{\max}, \\ [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}] / 2 &\leq E_1^* \leq m_c / 2. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Ограничения (5.117) для  $p_c^*$  можно записать в виде

$$|E_1^* - m_c^2 / 4E_1^*| \leq p_c^* \leq (p_c^*)_{\max}. \quad (5.118)$$

Ограничения на величину  $E_1^*$ , налагаемые условиями (5.117), при этом превращаются в условия (5.116).

При выполнении неравенства

$$(2E_c^* E_1^* - m_c^2) / 2p_c^* E_1^* \leq -1 \quad (5.119)$$

величина  $\cos \theta'$  изменяется в геометрических пределах

$$-1 \leq \cos \theta' \leq 1. \quad (5.120)$$

Решая неравенство (5.119) относительно  $p_c^*$ , находим, что пределы (5.120) осуществляются, если

$$0 \leq p_c^* \leq m_c^2 / 4E_1^* - E_1^*. \quad (5.121)$$

В терминах энергии  $E_c^*$  неравенства (5.121) эквивалентны ограничениям

$$m_c \leq E_c^* \leq m_c^2 / 4E_1^* + E_1^*. \quad (5.122)$$

Соотношения (5.121), (5.122) физически осмыслены, если выполнены условия

$$E_1^* < m_c / 2, \quad m_c^2 / 4E_1^* + E_1^* < (E_c^*)_{\max},$$

из которых вытекают следующие границы изменения энергии детектируемой частицы 1:

$$(1/2) [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}] \leq E_1^* \leq m_c / 2. \quad (5.123)$$

Если верхняя граница энергии  $E_c^*$  в неравенстве (5.122) превышает значение  $(E_c^*)_{\max}$ , то имеют место следующие ограничения на пределы изменения величин  $E_c^*$  и  $p_c^*$ :

$$0 \leq p_c^* \leq (p_c^*)_{\max}, \quad m_c \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}. \quad (5.124)$$

Условия (5.124) выполняются при следующих пределах изменения  $E_1^*$ :

$$0 \leq E_1^* \leq (1/2) [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}]. \quad (5.125)$$

Результаты проведенного выше анализа приводятся в табл. 2.

Таблица 2

Пределы изменения кинематических переменных в каскаде процессов (5.2), (5.105)

| Области изменения $E_1^*$                                                         | Области изменения $E_c^*$                                                                                                     | Области изменения $\cos \theta'$                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. $0 < E_1^* < \frac{1}{2} [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}]$                    | $m_c \leq E_c^* < (E_c^*)_{\max}$                                                                                             | $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$                                                                       |
| II. $\frac{1}{2} [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}] \leq E_1^* \leq \frac{m_c}{2}$ | IIa. $m_c \leq E_c^* \leq E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}$<br>IIб. $E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*} \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}$ | $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$<br>$\frac{2E_c^*E_1^* - m_c^2}{2p_c^*E_1^*} \leq \cos \theta' \leq 1$ |
| III. $\frac{m_c}{2} \leq E_1^* < \frac{1}{2} [(E_c^*)_{\max} + (p_c^*)_{\max}]$   | $E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*} \leq E_c^* \leq (E_c^*)_{\max}$                                                                 | $\frac{2E_c^*E_1^* - m_c^2}{2p_c^*E_1^*} \leq \cos \theta' \leq 1$                                  |

Установленные кинематические границы позволяют провести интегрирование в формуле (5.108) по угловым и энергетическим переменным нестабильной частицы  $c$  при фиксированных значениях энергии детектируемой частицы 1. Как следует из результатов табл. 2, пределы интегрирования зависят от области возможных значений энергии  $E_1^*$ .

Необходимо сделать следующее замечание. Распределение нестабильных частиц  $F(p_c^*, s)$  задается в угловых переменных  $\theta_c^*, \varphi_c^*$ , где  $\theta_c^*$  — угол между векторами  $p_c^*$  и  $p_a$  в Ц-системе реакции (5.2),  $\varphi_c^*$  — азимутальный угол вылета частицы  $c$ , от которого распределение  $F(p_c^*, s)$  не зависит в силу цилиндрической (азимутальной) симметрии задачи. Интегрирование по  $\varphi_c^*$  проводится в пределах  $0 \leq \varphi_c^* \leq 2\pi$ . В табл. 2 приводятся пределы изменения  $\cos \theta'$ , где  $\theta'$  — угол между векторами  $p_c^*$  и  $p_1^*$ ; направление вектора  $p_1^*$  фиксировано в пространстве.

Угол  $\theta_c^*$  связан с углом  $\theta'$  по теореме косинусов:

$$\cos \theta_c^* = \cos \theta' \cos \theta_1^* + \sin \theta' \sin \theta_1^* \cos \varphi', \quad (5.126)$$

где  $\theta_1^*$  — угол между векторами  $p_1^*$  и  $p_a$ , т.е. угол вылета частицы 1 в Ц-системе реакции (5.2), а угол  $\varphi'$  — азимутальный угол вылета частицы  $c$  в системе координат, где ось  $z$  направлена вдоль вектора  $p_1^*$ , а вектор  $p_a$  находится в плоскости  $(xz)$  (рис. 5.2). Угол  $\varphi'$  изменяется в геометрических пределах  $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$ .

Как правило, при определении пределов изменения величины  $\cos \theta^*$  следует в распределении  $F(p_c^*, s)$  совершить подстановку вместо  $\cos \theta_c^*$  его выражения через  $\theta'$  и  $\varphi'$  по формуле (5.126) и вместо интегрирования по телесному углу  $d\Omega_c^* = d \cos \theta_c^* d\varphi_c^*$  совершить интегрирование по телесному углу  $d\Omega^* = d \cos \theta' d\varphi'$ . Якобиан преобразования  $d\Omega_c^* \rightarrow d\Omega'$  равен единице. В области I (табл. 2) угол  $\theta'$  изменяется в геомет-

рических пределах ( $0 \leq \theta' \leq \pi$ ). В области II также имеется интервал значений  $E_c^*$ , в котором угол  $\theta'$  изменяется в геометрических пределах. В этих областях, где нет смысла совершать замену переменных с помощью (5.126), можно провести интегрирование по телесному углу  $d\Omega_c^*$  в геометрических пределах. Но при этом в функции  $\chi(s_{23})$  в аргументе  $s_{23} = m_c^2 - 2E_c^*E_1^* + 2p_c^*E_1^* \cos \theta'$  следует вместо  $\cos \theta'$  подставить значение

$$\cos \theta' = \cos \theta_c^* \cos \theta_1^* + \sin \theta_c^* \sin \theta_1^* \cos \varphi_c^*, \quad (5.127)$$

вытекающее из теоремы косинусов. Отметим также, что во всех трех областях изменения энергии  $E_1^*$  детектируемой частицы (табл. 2), угол ее вылета  $\theta_1^*$  может быть любым в пределах  $0 \leq \theta_1^* \leq \pi$ . Азимутальный угол  $\varphi_1^*$  изменяется в пределах  $0 \leq \varphi_1^* \leq 2\pi$ . От него инвариантное сечение (5.108) вообще не зависит в силу азимутальной симметрии задачи.

Таким образом, инвариантное дифференциальное сечение образования частицы 1 в каскаде процессов (5.2), (5.105) определяется в трех кинематических областях изменения энергии  $E_1^*$  формулами

$$\frac{E_1^* d\sigma}{d^3 p_1^*} = \begin{cases} \int_{m_c}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \int_{-1}^1 dz_c^* \int_0^{2\pi} d\varphi_c^* F(p_c^*, s) \chi(s_{23}), \\ 0 \leq E_1^* \leq [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}]/2, \\ \\ E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*} \leq E_c^* \leq E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*} \\ \int_{m_c}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \int_{-1}^1 dz_c^* \int_0^{2\pi} d\varphi_c^* F(p_c^*, s) \chi(s_{23}) + \\ + \int_{E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \int_{\frac{2E_c^*E_1^* - m_c^2}{2p_c^*E_1^*}}^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' F(p_c^*, s) \chi(s_{23}), \\ (E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max} \leq E_1^* \leq m_c/2, \\ \\ \int_{E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \int_{\frac{2E_c^*E_1^* - m_c^2}{2p_c^*E_1^*}}^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' F(p_c^*, s) \chi(s_{23}), \\ m_c/2 \leq E_1^* \leq [(E_c^*)_{\max} - (p_c^*)_{\max}]/2. \end{cases} \quad (5.128)$$

На границах кинематических областей изменения энергии распределения  $E_1^* d\sigma/d^3 p_1^*$  непрерывно "сшиваются" друг с другом. В модели релятивистского фазового объема для распада (5.105) функция  $\chi(s_{23})$  является постоянной величиной,  $\chi(s_{23}) = 2\beta/\pi m_c^2$ . В таком случае в кинематической области I (табл. 2) сечение  $E_1^* d\sigma/d^3 p_1^*$  выражается через полное сечение инклюзивного процесса (5.105):  $\sigma_c = \langle n_c \rangle \sigma_{in}(ab)$ . Формулы (5.128) в модели релятивистского фазового объема для распада (5.105)

представляются в виде

$$\frac{E_1^* d\sigma}{d^3 p_1^*} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\beta\sigma_c}{\pi m_c^2}, \\ & \frac{2\beta\sigma_c}{\pi m_c^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sigma_c} \int_{E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \frac{2E_c^* E_1^* - m_c^2}{-1} \right] \times \\ & \times dz' \int d\varphi' F(p_c^*, s), \\ & \frac{2\beta\sigma_c}{\pi m_c^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sigma_c} \int_{E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}}^{(E_c^*)_{\max}} dE_c^* p_c^* \frac{2E_c^* E_1^* - m_c^2}{-1} \right] \times \\ & \times dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' F(p_c^*, s) - \frac{1}{\sigma_c} \int_{m_c}^{E_1^* + \frac{m_c^2}{4E_1^*}} dE_c^* p_c^* \times \\ & \times \int_{-1}^1 dz_c^* \int_0^{2\pi} d\varphi_c^* F(p_c^*, s) \end{aligned} \right. \quad (5.129)$$

Области изменения  $E_1^*$  соответствуют (5.128). Из формул (5.129) следует, что в области I (табл. 2) инвариантное дифференциальное сечение образования частицы 1 не зависит от  $E_1^*$  и  $\theta_1^*$ , а в области II и III монотонно убывает с ростом  $E_1^*$  и зависит от  $\theta_1^*$  только через  $\cos \theta_c^*$  (см. (5.126)).

Дальнейшие вычисления распределений (5.128), (5.129) проводятся, как правило, численными методами с применением ЭВМ и использованием феноменологических или модельных параметризаций функций  $F(p_c^*, s)$ ,  $\chi(s_{23})$ . Кинематика используется для определения пределов интегрирования.

Обнаружить ошибки в пределах интегрирования бывает довольно трудно, так как численные результаты расчетов на ЭВМ могут не содержать явных ошибок. Поэтому тщательность кинематического анализа является важнейшим критерием при моделировании сложных каскадных процессов, примеры которых здесь рассмотрены. Конкретные расчеты распределений частиц 1, образованных в каскаде процессов (5.2), (5.105), в условиях, когда частицы сорта  $c$  вылетают преимущественно под небольшими углами к направлению оси соударения первичных частиц  $a$  и  $b$ , показывают, что в распределении по поперечным импульсам  $p_{1\perp}$  проявляется максимум вблизи значения  $p_{1\perp} \approx m_c/4$  [19, 42, 43]. В разделе 3.4 максимум при таком же значении  $p_{1\perp}$  предсказывался в распределении событий трехчастичного распада (см. (3.61), (3.63)). Однако поперечный импульс продукта распада в случае (3.61) измерялся относительно направления импульса нестабильной частицы, а в каскаде процессов

(5.2), (5.105) это направление предполагается неизвестным. Тем не менее вытянутость углового распределения частиц — "родителей" инклюзивного продукта распада 1, приводит к приближенному сохранению положения максимума распределения событий по  $p_{1\perp}$ . Наблюдение такого качественного поведения распределения  $d\sigma/dp_{1\perp}$  является свидетельством в пользу того, что среди инклюзивных частиц сорта 1 имеются продукты трехчастичного распада тяжелой частицы  $c$ . По положению максимума грубо определяется значение массы этой частицы.

В заключение этой главы отметим интересный кинематический метод, использованный при анализе столкновений различных частиц. Конкретно он применялся для описания  $pp$ -соударений [43]. Из-за различия кваркового состава обеих частиц (пион состоит из двух кварков, а протон — из трех) в  $\Pi$ -системе сталкивающихся частиц возникает асимметрия в угловом распределении вторичных частиц. Для анализа этой асимметрии весьма удобно ввести новую систему отсчета, в которой все частицы разлетаются симметрично ( $S$ -система). Для количественного анализа вводится отношение двух Лоренц-факторов  $\gamma_S/\gamma_C$ , где  $\gamma_S$  — Лоренц-фактор  $S$ -системы относительно  $\Pi$ -системы, а  $\gamma_C$  — Лоренц-фактор  $\Pi$ -системы. Для одинаковых частиц среднее значение  $\langle \gamma_S/\gamma_C \rangle = 1$ , для частиц с разным кварковым составом оно может существенно отличаться от 1. Обнаруженная асимметрия в угловых распределениях вторичных частиц [43] была одним из первых проявлений кварковой структуры адронов в процессе соударений частиц высокой энергии. Упрощенное, в рамках кварковой модели, возникновение асимметрии связано с тем, что лидирующий кварк, входящий в состав пиона уносит половину его первичной энергии, а соответствующий кварк, входящий в состав протона, — треть. Это различие и приводит к асимметрии разлета вторичных частиц в  $\Pi$ -системе.



СТАТИСТИЧЕСКИЕ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ  
И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
МНОЖЕСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Статистический подход  
к процессам множественного образования адронов

Эксклюзивный процесс образования  $N$  адронов при соударении двух энергичных первичных частиц  $a$  и  $b$ ,

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + N, \quad (6.1)$$

характеризуется дифференциальным сечением реакции (см. (1.34)). Относительная дифференциальная вероятность наблюдения процесса (6.1) с образованием вторичных адронов с импульсами в интервалах от  $p_f$  до  $p_f + dp_f$  ( $f = 1, 2, \dots, N$ ) определяется по формуле

$$dw_N = \frac{d\sigma_N}{\sigma_{tot}} = \sum_{S_f S_f} |M|^2 \left( \prod_{f=1}^N \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \right) \times \\ [4j\sigma_{tot}(2S_a + 1)(2S_b + 1)]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum_{f=1}^N p_f), \quad (6.2)$$

где  $P = p_a + p_b$  — сумма 4-импульсов первичных частиц  $\sigma_{tot} = \sum \sigma_N$  — сумма сечений всех возможных каналов реакции взаимодействия частиц  $a$  и  $b$ ,  $\sigma_N$  — сечение отдельного канала реакции с  $N$  частицами в конечном состоянии. Для определенности будем считать все вторичные частицы одинаковыми. Фазовый объем  $N$  тождественных частиц следует разделить на фактор  $(N!)$ , учитывающий их неразличимость [9]. Будем также полагать тождественными частицы, принадлежащие к одному и тому же изотопическому мультиплету. Поэтому в формуле (6.2) следует провести дополнительно суммирование по различным значениям проекций изоспинов вторичных частиц. Выделим из суммы квадратов модуля инвариантных амплитуд множители, отвечающие числу различных спиновых, изоспиновых и других аналогичных квантовых состояний вторичных адронов, и представим (6.2) в следующем виде:

$$dw_N = (N!)^{-1} \Phi_N(P; p_1, p_2, \dots, p_N) \times \\ \times \left[ \prod_{f=1}^N (2S_f + 1)(2T_f + 1) \frac{m_f}{E_f} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right] \delta^{(4)}(P - \sum_{f=1}^N p_f), \quad (6.3)$$

где  $\Phi_N(P; p_1, p_2, \dots, p_N)$  — функция от релятивистски инвариантных кинематических переменных, составленных из скалярных произведений 4-импульсов вторичных и первичных частиц. Ее конкретная форма определяется динамикой процесса (6.1).

Формула (6.3) напоминает формулу микроканонического распределения для равновесного состояния замкнутой системы одинаковых частиц [44]:

$$dw = \text{const} (N!)^{-1} \left[ \prod_{f=1}^N (2S_f + 1)(2T_f + 1) \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} V \right] \times \\ \times \delta(E - \sum_{f=1}^N E_f), \quad (6.4)$$

где  $V$  — объем, занимаемый системой в конфигурационном (координатном) пространстве,  $E$  — полная энергия системы,  $E_f$  — энергия частицы системы. Постоянный множитель в формуле (6.4) определяется условием нормировки [44]. Величина

$$d\Gamma_f = (2S_f + 1)(2T_f + 1) \frac{d^3 p_f V}{(2\pi)^3},$$

входящая в правую часть формулы (6.4), называется статистическим весом состояния данной частицы, а произведение

$$d\Gamma_N = (N!)^{-1} \prod_{f=1}^N d\Gamma_f$$

статистическим весом системы  $N$  тождественных частиц.

По сравнению с микроскопическим статистическим распределением (6.4) в формуле (6.3), кроме факторов статистических весов частиц системы, содержится инвариантная функция  $\Phi_N$ ,  $\delta^{(3)}$ -функция, выражающая закон сохранения импульса в замкнутой системе, и фактор  $\prod_{f=1}^N m_f/E_f$ , обеспечивающий релятивистскую инвариантность произведе-

ния  $\prod_{f=1}^N [m_f d^3 p_f / E_f (2\pi)^3]$ . Поскольку величина  $dw_N$  безразмерна, то размерность  $\delta^{(4)}$ -функции в (6.3) равна  $M^{-4}$ , а размерность  $N$ -частичного импульсного пространства равна  $M^{3N}$ , и размерность функции

$$[\Phi_N] = MM^{3(1-N)} = MV^{(N-1)},$$

где величина  $V$  соответствует объему в трехмерном конфигурационном пространстве. В выбранной системе единиц  $V = L^3 = M^{-3}$  ( $L = M^{-1}$  — размерность длины,  $M$  — размерность массы). Если перейти в формуле (6.3) от безразмерной вероятности к величине  $dw_N/\mu$ , где  $\mu$  — характерная масса одной из вторичных частиц (например, масса пиона), то размерность

$$[\Phi_N] = V^{(N-1)}. \quad (6.5)$$

Переопределение величины  $dw_N$  и использование вместо этого размерной вероятности  $dw_N/\mu$  не изменяет физических результатов расчетов относительных вероятностей реализации различных каналов реакции (6.1). В дальнейшем будем считать, что вероятность (6.3) характеризуется размерностью  $[dw_N] = M^{-1}$ , а размерность  $\Phi_N$  определяется формулой (6.5)\*.

\*) По поводу выбора размерности величины  $dw_N$  в статистических моделях см. также в книге [6].

На основе (6.5) можно выделить из функции  $\Phi_N$  размерный множитель:

$$\Phi_N = V^{N-1} \Psi_N(P; p_1, p_2, \dots, p_N), \quad (6.6)$$

где  $\Psi_N$  — безразмерная функция.

Если процесс (6.1) осуществляется в конечном объеме  $V$  конфигурационного пространства, то  $\delta^{(3)}$  функцию, отвечающую закону сохранения импульса в переменных Ц-системы реакции (6.1) следует заменить:

$$(2\pi)^3 \delta^{(4)} \left( \sum_{f=1}^N p_f \right) = \lim_{V \rightarrow \infty} \int \exp \left[ i \sum_{f=1}^N (p_f x) \right] d^3 x \rightarrow \left( \int d^3 x \right) \sum_{\Delta f=1}^N p_f = 0 = V.$$

Тогда выражение (6.3) представляется в виде

$$dw_N = \Psi_N(P; p_1, p_2, \dots, p_N) (N!)^{-1} \prod_{f=1}^N (2S_f + 1) (2T_f + 1) \times \\ \times V \frac{m_f}{E_f} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \delta(\sqrt{s} - \sum_{f=1}^N E_f). \quad (6.7)$$

Все кинематические величины в (6.7)  $(E_f, p_f)$  выбраны в Ц-системе, которая определяется условием  $P = \sum_{f=1}^N p_f = 0$ . Формула (6.7) отличается от формулы (6.4) множителем

$$\Psi_N(P; p_1, p_2, \dots, p_N) \prod_{f=1}^N (m_f/E_f). \quad (6.8)$$

Сформулируем теперь основные постулаты статистического подхода к процессам множественного рождения (6.1). Статистические модели базируются на следующих предположениях.

1. Считается, что в некотором объеме  $V$  в результате сильного взаимодействия первичных частиц  $a$  и  $b$  (см. 6.1) образуется система  $N$  вторичных частиц (реальных, виртуальных), в которой за время взаимодействия успевает установиться статистическое равновесие.

2. Количество вторичных частиц  $N$  в системе достаточно велико, чтобы можно было применять статистические методы описания таких систем.

3. К моменту установления статистического равновесия состояния отдельных частиц системы оказываются статистически независимыми.

Постулат 1 вводит в теорию параметр  $V$  — объем, в котором устанавливается статистическое равновесие. Постулат 2 — простейшая реализация стандартного статистического подхода. Постулат 3 требует, чтобы после установления статистического равновесия между частицами системы отсутствовали всякие корреляции (кроме связанных с законом сохранения полной энергии).

Как следует из сравнения микроканонического распределения (6.4) с формулой (6.7), при определенных предположениях о поведении функции (6.8) в рамках ковариантного релятивистского подхода к множественным процессам, выражающегося в вычислениях вероятностей про-

цессов (6.1) на основе формулы (6.2), могут возникать выражения, аналогичные микроканоническому распределению в статистической физике. Поскольку в основе статистической физики [44] лежит понятие о фазовом объеме многочастичной системы, она базируется на законе сохранения энергии замкнутой системы. Следовательно, статистические модели множественных процессов уместно отнести к области кинематики.

## 6.2. Ковариантная и другие статистические модели множественных процессов

**Ковариантная формулировка статистической модели.** Обратимся теперь к конкретным реализациям статистического подхода в применении к процессам множественной генерации адронов. Полагая, что читатель знаком со статистической физикой в объеме стандартного курса (см., например, [44]), ограничимся здесь изложением основных следствий статистических моделей, вытекающих из законов термодинамики для систем с переменным числом частиц. Чтобы рассмотреть статистические модели с единой точки зрения, обратимся к ковариантной статистической модели, предложенной в работе [45]. В этой модели постулируется факторизованная форма функции  $\Psi_N$ :

$$\Psi_N = \prod_{f=1}^N f(P, p_f), \quad (6.9)$$

которая определяется в соответствии с постулатом 3 статистического подхода.

Из соображений простоты, релятивистской инвариантности и возможности проведения аналитических расчетов в [45] рассматривались функции  $f(P, p_f)$  следующего класса:

$$f(P, p_f) = C(P, p_f)^q / s^r = C(E_f^q / s^{r-q/2}), \quad (6.10)$$

где  $q, r$  — постоянные параметры,  $(P, p_f) = \sqrt{s} E_f$ ,  $E_f$  — энергия частицы  $f$  в Ц-системе. Фактор  $C$  — постоянный параметр с размерностью  $M^2(r-q)$ , что обеспечивает безразмерность функций (6.9) и (6.10). Будем для простоты полагать, что все вторичные частицы имеют одну и ту же массу  $m$ , а первичные частицы имеют также одинаковые массы  $M$ . Тогда удобно переопределить постоянный параметр  $C$ :

$$C = \lambda (2M)^{2r-q} / m^q, \quad (6.11)$$

где  $\lambda$  — безразмерная константа. Тогда функция (6.10) имеет вид

$$f(P, p_f) = \lambda \left( \frac{E_f}{m} \right)^q / \left( \frac{\sqrt{s}}{2M} \right)^{2r-q}. \quad (6.12)$$

Модель (6.9)–(6.12) позволяет представить распределение (6.7) в следующей форме:

$$dw_N = (N!)^{-1} \left[ \prod_{f=1}^N \lambda \left( \frac{E_f}{m} \right)^{q-1} g_{S,T} V_s \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right] \delta(\sqrt{s} - \sum_{f=1}^N E_f), \quad (6.13)$$

$$V_s = V(\sqrt{s}/2M)^{q-2r}, \quad (6.14)$$

где

$$g_{S,T} = (2S_f + 1)(2T_f + 1).$$

Результат (6.12) можно интерпретировать, как микроканоническое статистическое распределение  $N$  одинаковых частиц в объеме  $V_s$ , зависящем от первичной энергии  $\sqrt{s}$  по степенному закону (6.14), множитель  $\lambda(E_f/m)^{q-1}$  интерпретируется как плотность вероятности образования частицы  $f$  с импульсом в интервале от  $p_f$  до  $p_f + dp_f$ , отнесенная к единице объема конфигурационного трехмерного пространства. Безразмерный параметр  $\lambda$  может зависеть от сорта вторичной частицы.

Используя стандартные выражения статистической физики [44] и соотношение (6.13) можно определить энтропию и температуру\*) и получить следующее распределение по числам заполнения для системы бозонов или фермионов:

$$dN = \lambda g_{S,T} E^{q-1} m^{1-q} \left[ \exp \left( \frac{E - \mu}{T} \right) \mp 1 \right]^{-1} \frac{d^3 p V_s}{(2\pi)^3}. \quad (6.15)$$

Верхний знак в выражении, стоящем в квадратных скобках, относится к бозонной системе, а нижний — к фермионной,  $\mu$  — химический потенциал, который для равновесной статистической системы с переменным числом частиц равен нулю.

В релятивистском случае, когда  $E \approx |p|$ , из (6.15) вытекает уравнение состояния [46]

$$p_g = \epsilon/(q+2), \quad (6.16)$$

где  $p_g$  — давление,  $\epsilon = \sqrt{s}/V_s$  — плотность энергии в системе. При условии, что число частиц в системе велико ( $\ln N \gg 1$ ) средняя множественность частиц в такой модели изменяется с энергией по закону

$$\langle N \rangle \sim s^{(q-r+1)/(q+3)}. \quad (6.17)$$

Отметим сразу недостаток всех статистических моделей рассматриваемого типа. Они предсказывают изотропное угловое распределение вторичных частиц в Ц-системе. Из опыта известно, что это предсказание оправдывается лишь при не очень высоких энергиях  $\sqrt{s} \lesssim 5$  ГэВ, когда в грубом приближении наблюдаемое распределение в Ц-системе изотропно. Указанный недостаток можно скорректировать, вводя в фазовый объем феноменологические факторы типа  $\exp(-bp_\perp)$ ,  $\exp(-bp_\parallel^2)$  и т.п., ограничивающие эффективные области значений поперечных импульсов вторичных частиц, и подбирая параметр  $b$  в соответствии с данными опыта. Обсуждение вопросов численного моделирования множественных процессов на основе таких подходов выходит за рамки нашей книги.

Термодинамические соотношения при обобщенном уравнении состояния [46]. Термодинамический потенциал равновесной статистической системы  $\Phi$  определяется следующим выражением [44]:

$$\Phi = E + p_g V - TS,$$

\*) Температура  $T$  везде в книге имеет размерность энергии (массы).

где  $E$  — энергия системы,  $V$  — ее объем,  $S$  — энтропия,  $T$  — температура,  $p_g$  — давление. Потенциал  $\Phi$  и химический потенциал  $\mu$  связаны соотношением [44]

$$\Phi = \mu N,$$

где  $N$  — число частиц в системе. Для статистически равновесных систем с переменным числом частиц это число  $N$  определяется из условия равновесия  $d\Phi/dN = 0$ , которое отвечает равенству нулю химического потенциала ( $\mu = 0$ ) [46]. Согласно определению величины  $\Phi$  в условиях статистического равновесия  $E + p_g V - TS = 0$  или  $\epsilon + p_g - Ts_e$ , где  $\epsilon$  — плотность энергии,  $s_e$  — плотность энтропии. Используя это условие равновесия и термодинамическое соотношение

$$dE = -p_g dV + T dS,$$

находим  $(\epsilon + p_g - Ts_e)dV + V d\epsilon = TV ds_e$ , или

$$d\epsilon = T ds_e.$$

Из условия равновесия следует, что  $d\epsilon + dp_g = T ds_e + s_e dT$ , или

$$dp_g = s_e dT.$$

Скорость звука  $c_0$  в среде определяется выражением  $dp_g/d\epsilon = a = c_0^2$ , которое с учетом предыдущих соотношений приводит к следующим уравнениям, позволяющим установить зависимости  $s_e(T)$ ,  $\epsilon(T)$ :

$$ds_e/s_e = (1/a)dT/T, \quad d\epsilon = (s_e/a)dT.$$

Из первого уравнения следует, что

$$s_e = s_{e0}(T/T_0)^{1/a}, \quad (6.18)$$

где  $s_{e0}$  — плотность энтропии (удельная энтропия) при температуре  $T_0$ . Из второго уравнения и (6.18) вытекает, что

$$\epsilon = \epsilon_0(T/T_0)^{1+1/a}. \quad (6.19)$$

Поскольку  $dp_g = s_e dT$ , то

$$p_g = a\epsilon_0(T/T_0)^{(1+a)/a} = a\epsilon. \quad (6.20)$$

Уравнение (6.20) называют обобщенным уравнением состояния [17, 46]. Зависимость множественности вторичных частиц от энтропии системы можно найти следующим способом [46]. Плотность вторичных частиц  $n(T)$ , как и все термодинамические характеристики системы, является функцией температуры  $T$ . Поэтому отношение  $n(T)/s_e(T) = f(T)$ , где  $f(T)$  — функция температуры. Переходя от плотности к множественности  $N(T) = n(T)V$  и полной энтропии  $S(T) = s_e(T)V$ , находим

$$N(T) = S(T)f(T). \quad (6.21)$$

В статистическо-гидродинамических моделях полагают, что распад системы на вторичные частицы происходит при некоторой фиксированной температуре  $T_f \approx \mu$  ( $\mu$  — масса пиона). Неизвестная функция  $f(T)$  при значении  $T = T_f$  превращается в некоторую константу  $f(T_f) = \text{const}$ . Энтропия  $S(T_f)$  при температуре  $T_f$  выражается через плотность энергии  $\epsilon(T_f)$  и

объем  $V$  системы в момент образования вторичных частиц:

$$S(T_f) = s_e(T_f) V = s_{e0}(\epsilon/\epsilon_0)^{1/(1+a)} V. \quad (6.22)$$

Поскольку  $\epsilon = \sqrt{s}/V$ , то на основе (6.21), (6.22) находим

$$\langle N \rangle \sim s^{1/2(1+a)} V_s^{a/(1+a)}. \quad (6.23)$$

Символ  $s$  обозначает квадрат полной энергии соударения в Ц-системе. В (6.23) учтена зависимость объема системы в момент образования вторичных адронов от энергии соударения  $\sqrt{s}$  первичных частиц.

Формула (6.23) устанавливает зависимость средней множественности от энергии на основе предположений об уравнении состояния и объеме системы  $V_s$  в момент образования реальных адронов. В ковариантной модели [45] формула (6.23) приводит к результату (6.17) для энергетического поведения средней множественности. Рассмотрим далее кратко наиболее распространенные варианты статистических моделей.

**Статистическая модель со сжатым объемом.** Эта модель была предложена Ферми [47]. Она основана на простейшем предположении об объеме области, в которой рождаются вторичные частицы. Пусть в Ц-системе происходят  $NN$ - или  $NN$ -соударения ( $N$  — нуклон,  $\bar{N}$  — антинуклон), в которых первичные частицы обладают энергией  $\sqrt{s}/2$  каждая. Если в собственной системе покоя нуклон (антинуклон) имеет сферическую форму с радиусом  $r_N$ , то в Ц-системе, благодаря релятивистскому сжатию сферы в продольном направлении в  $(\sqrt{s}/2M)$  раз ( $M$  — масса нуклона), объем нуклона  $V_s = V(2M/\sqrt{s})$ , где  $V = 4\pi r_N^3/3$  — объем покоящегося нуклона (антинуклона). В момент соударения нуклоны (или нуклон и антинуклон) сливаются в единую систему, сплюснутую в продольном направлении в  $(\sqrt{s}/2M)$  раз и имеющую форму диска с радиусом  $r_N$  в поперечном направлении. В этом диске с объемом  $V_s = V(2M/\sqrt{s})$  устанавливается, по предположению, статистическое равновесие. Считается, что вторичные частицы успевают образоваться в объеме  $V_s$  и статистическое равновесие осуществляется именно на этом этапе [47]. Уравнение состояния совпадает с уравнением состояния релятивистского идеального газа [44]:

$$p_g = \epsilon/3.$$

Указанные предположения отвечают следующим значениям параметров ковариантной модели (6.12):  $q = 1$ ,  $r = 1$  и приводят к микрочаноническому распределению для  $N$  тождественных частиц [44]:

$$dw_N = (N!)^{-1} \left[ \prod_{f=1}^N \lambda_{gST} V \frac{2M}{\sqrt{s}} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right] \delta(\sqrt{s} - \sum_{f=1}^N E_f). \quad (6.24)$$

Согласно (6.23), множественность в модели со сжатым объемом  $V_s = (4\pi r_N^3/3)(2M/\sqrt{s})$  и уравнением состояния с параметром  $a = 1/3$

$$\langle N(s) \rangle \sim s^{1/4}. \quad (6.25)$$

Напомним, что зависимость (6.23), а следовательно и (6.25), получается как следствие законов статистики (термодинамики) в пределе высоких энергий  $\sqrt{s}$ , при которых число вторичных частиц экспоненциально вели-

ко ( $\ln N \gg 1$ ). В области энергий  $\sqrt{s} \lesssim 10-15$  ГэВ расчеты  $\langle N \rangle$  следует проводить на основе точных статистических формул типа (6.24) [48]. При  $\sqrt{s} \lesssim 5$  ГэВ такие вычисления приводят к зависимости  $\langle N(s) \rangle \sim \sqrt{s}$ , а в области  $5 \lesssim \sqrt{s} \lesssim 15$  ГэВ — к зависимости  $\langle N(s) \rangle \sim s^{1/3}$ . Зависимость (6.25) соответствует значению  $\sqrt{s} \gtrsim 15-20$  ГэВ.

Модель Ферми неоднократно подвергалась критическому анализу как с теоретической точки зрения, так и вследствие несоответствия ее предсказаний данным опыта по угловым распределениям и составу вторичных адронов (обсуждение этих вопросов содержится, например, в книге [17]).

**Статистическая модель с расширяющимся объемом [49].** В модели со сжатым объемом имеется довольно слабое место: если число вторичных адронов  $N \gg 1$ , то не ясно, как эти вторичные адроны могут поместиться в объеме, размеры которого существенно меньше суммарного объема этих частиц (размеры нуклонов и пионов примерно одинаковы). Естественным выходом из этого противоречия является предположение о том, что возбужденная адронная материя превращается во вторичные адроны лишь тогда, когда ее объем достаточно расширится, чтобы в нем могли поместиться все вторичные адроны [49]. Это предположение означает, что характеристический объем

$$V_s = \langle N(s) \rangle V_0, \quad (6.26)$$

где  $\langle N(s) \rangle$  — среднее число вторичных адронов (пионов),  $V_0$  — объем покоящегося адрона. Если формулу (6.26) подставить в соотношение (6.23) и решить его относительно  $\langle N(s) \rangle$ , то находим энергетическую зависимость для средней множественности:

$$\langle N(s) \rangle \sim \sqrt{s}. \quad (6.27)$$

По такому же закону расширяется и объем  $V_s$  (6.26). Сопоставление с опытом модели с расширяющимся объемом было проведено в работе [50], где можно найти много интересных результатов, относящихся к статусу современных статистических моделей множественных процессов. Одним из важных выводов работы [50] является заключение о том, что модель с расширяющимся объемом согласуется с опытом при не очень высоких энергиях, когда множественность вторичных адронов  $N \lesssim 10$  ( $\sqrt{s} \lesssim 7-10$  ГэВ).

**Статистическая модель с инвариантным фазовым объемом (LIPS)\* [51].** С этой моделью читатель встречался ранее в разделе 1.6, где она использовалась для расчета распределений вторичных адронов по эффективной массе (см. также [6]). Основная гипотеза этой модели заключается в предположении о том, что квадрат модуля инвариантной амплитуды является постоянной величиной, а распределение вторичных частиц по кинематическим переменным определяется их релятивистски инвариантным фазовым объемом (см. разделы 1.5, 1.6). Модель LIPS отвечает следующим значениям параметров ковариантной статистической модели:  $q = 0$ ,  $r = 0$ , т.е. постоянному (не зависящему от энергии) объему, в котором происходит образование вторичных адронов. Такой выбор параметров не имеет обос-

\* LIPS — Lorentz-Invariant Phase Space (англ.) — лоренц-инвариантный фазовый объем.

нования, следующего из общих физических принципов. Оправданием этой модели служат ее максимальная простота (независимость от динамики) и удовлетворительное согласие с экспериментальными данными о распределении эффективных масс адронов нерезонансного фона [6].

Заметим, что модель LIPS, дополненная постулатом об ограниченности средних значений поперечных импульсов вторичных адронов эквивалентна одной из основных концепций множественных процессов — мультипериферизму (см. раздел 5.4). В немодернизированной форме LIPS приводит к следующей энергетической зависимости средней множественности (см. (6.23)):

$$\langle N(s) \rangle \sim s^{1/3}.$$

Здесь учтено, что  $V_s \approx \text{const}$ ,  $a = (q + 2)^{-1} = 1/2$  при  $q = 0$  (см. (6.16)). Такая зависимость  $\langle N(s) \rangle$  не противоречит данным опыта при не очень высоких энергиях ( $\sqrt{s} \lesssim (10-15)$  ГэВ), однако модель LIPS не в состоянии объяснить состав вторичных адронов в множественных процессах.

В заключение сделаем два замечания. 1. Статистическая теория предполагает изотропию углового распределения вторичных частиц в Ц-системе. В этом случае распределение по псевдобыстротам в любой системе координат хорошо аппроксимируется функцией Гаусса (см. [5]). 2. Статистическая теория в настоящее время успешно применяется на кварковом уровне [52] для моделирования процесса трансформации кварков в адроны.

### 6.3. Гидродинамическая модель множественных процессов

Основы гидродинамического подхода. Гидродинамическая модель множественных процессов [30], предложенная более 30 лет назад, до сих пор считается одной из наиболее эффективных моделей, базирующихся на основных макроскопических физических теориях (статистическая физика, термодинамика и релятивистская гидродинамика). Хотя за прошедшие десятилетия микроскопические основы этого подхода несколько модифицировались, кинематические, статистические и гидродинамические элементы этой теории практически сохранились, выдержав испытание временем (см., например, [53]).

Гидродинамическая модель основывается на представлениях о трех основных стадиях процесса множественного образования адронов в реакциях взаимодействия двух адронов (6.1).

Первая стадия. В результате сильного взаимодействия первичные релятивистски сжатые адроны образуют адронную жидкость, состоящую из сильно взаимодействующих между собой элементов. В этой системе еще на стадии сжатия успевает установиться статистическое равновесие. Элементы адронной жидкости часто рассматриваются как равновесные статистические подсистемы, содержащие достаточно большое число виртуальных сильно взаимодействующих частиц, чтобы можно было пользоваться законами статистической физики и термодинамики. Под виртуальными частицами подразумеваются разнообразные объекты, в том числе, обычные виртуальные адроны или кварки и глюоны — кванты сильного взаимодействия, образующие кварк-глюонную плазму (или жидкость). Последние

варианты становятся все более популярными и интенсивно развиваются (см., например, [53, 54]), находя идейную опору в квантовой теории сильных взаимодействий кварков и глюонов — квантовой хромодинамике (см., например, [55]). К сожалению, квантовая хромодинамика позволяет пока количественно описать с помощью теории возмущений лишь процессы с большими передачами энергии и импульса [55]. Отметим, что первая стадия множественного процесса определяется в значительной степени динамикой сильного взаимодействия.

Вторая стадия. После установления статистического равновесия в сжатом объеме адронной материи (кварк-глюонной плазмы) начинается процесс ее расширения и остывания. Именно эта стадия является объектом гидродинамического описания. Вследствие гидродинамического расширения адронной жидкости, преимущественно вдоль оси соударения первичных адронов в Ц-системе, ее плотность, давление и температура падают, приближаясь к некоторым критическим значениям (см. ниже), при которых из элементов адронной жидкости (кварк-глюонной плазмы) начинают формироваться реальные адроны. Расширение системы в поперечном направлении определяется гидродинамикой и термодинамикой.

Третья стадия. На этой стадии из остывших элементов адронной материи формируются реальные физические адроны. Процесс объединения кварков и глюонов в адроны определяется динамикой сильного взаимодействия на расстояниях порядка адронных размеров. На описание этой стадии гидродинамика не претендует, но поскольку она описывает гидродинамический разлет элементов адронной жидкости, то их распределение по кинематическим характеристикам (быстротам, поперечным импульсам) непосредственно отражается на соответствующих адронных распределениях.

Уравнения статистической релятивистской гидродинамики. Гидродинамический разлет элементов адронной жидкости, находившихся в начальный момент в релятивистски сжатом объеме  $V_s = V(2M/\sqrt{s})$  в состоянии статистического равновесия, описывается уравнениями релятивистской гидродинамики (см., например, [56])

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0, \quad (6.28)$$

где  $T_{ik}$  — релятивистский тензор плотности энергии-импульса элемента жидкости\*):

$$T_{ik} = (p_g + \epsilon) u_i u_k - p_g g_{ik}. \quad (6.29)$$

Здесь  $x_k$  — 4-координата элемента жидкости,  $\epsilon$  — плотность его энергии,  $p_g$  — давление,  $u_i$  — 4-скорость этого элемента,  $g_{ik}$  — метрический тензор пространства-времени Минковского. Компоненты 4-скорости связаны друг с другом соотношением

$$u^2 = 1. \quad (6.30)$$

Напомним, что  $u_0 = (1 - v^2)^{-1/2}$ ,  $u = v(1 - v^2)^{-1/2}$ , где  $v$  — скорость элемента жидкости в трехмерном пространстве. В пяти уравнениях (6.28),

\*) В (6.29) опущены слагаемые, связанные с вязкостью и теплопроводностью адронной жидкости. Об их роли см., например, [17, 50].

(6.30) фигурируют шесть неизвестных величин:  $\epsilon$ ,  $p_g$ ,  $u_i$ , которые являются функциями пространственных координат  $x$  и времени  $t$ . Система уравнений (6.28), (6.30) не имеет однозначного решения, поскольку число неизвестных превышает число уравнений. Дополнительное уравнение выбирается на основе термодинамических свойств адронной жидкости — ее уравнения состояния, которое обычно (см. (6.20)) задают в следующей форме [17, 56]:

$$p_g = a\epsilon. \quad (6.31)$$

Далее для однозначного решения системы уравнений (6.28), (6.30), (6.31) нужно задать начальные и граничные условия.

В гидродинамическом подходе к множественным процессам обычно считают, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) адронная жидкость заключена в объем  $V_s = V(2M/\sqrt{s})$ , распределена равномерно по этому объему и покоится во всем этом объеме. Ее истечение в вакуум происходит за счет внутренних сил, в данном случае, за счет сильного взаимодействия ее элементов. Предполагается также, что решение задачи обладает цилиндрической симметрией относительно оси соударения первичных адронов в Ц-системе. Эта система отсчета и выбирается для нахождения конкретного решения.

В принципе, решение системы уравнений релятивистской гидродинамики может быть найдено в одномерном случае при любых значениях параметра  $a = c_0^2$  ( $c_0$  — скорость звука в адронной жидкости), заключенных в интервале  $0 \leq a \leq 1$  (см. [46] и ниже). После сделанных пояснений мы встречаемся с задачей, в которой динамика движения элемента жидкости определяется релятивистским гидродинамическим уравнением и уравнением состояния. Конечная цель состоит в выяснении кинематических характеристик (распределений) элементов жидкости в момент образования реальных адронов. По предположению в течение всей стадии гидродинамического разлета в каждом элементе адронной жидкости (кварк-глюонной плазмы) имеет место статистическое равновесие. При этом в собственной системе элемента действуют термодинамические закономерности, характерные для равновесных систем с несохраняющимся числом частиц, рассмотренные в разделе 6.2 (см. (6.18)–(6.23)). Момент образования наиболее легких адронов соответствует значению температуры  $T_f \approx \mu$  ( $\mu$  — масса пиона) и плотности энергии  $\epsilon_f \approx \mu^4$  в элементах адронной жидкости.

Одномерный гидродинамический разлет. Начальные условия характеризуются цилиндрической симметрией; в процессе разлета адронной жидкости эта симметрия сохраняется. Поэтому на начальной стадии гидродинамического разлета можно ожидать, что он окажется практически одномерным и симметричным в Ц-системе в направлениях вперед — назад относительно плоскости перпендикулярной оси соударения первичных адронов. Элементы адронной жидкости на этой плоскости в течение всего времени разлета характеризуются быстротой  $y = 0$  (все остальные элементы обладают нулевой быстротой только в момент времени  $t = 0$ ). В работе [57] было показано, что одномерное приближение имеет весьма широкие границы применимости и определяет распределение элементов жидкости по быстротам. Движение элементов жидкости в поперечном направлении, в основном, тепловое (см. также [17, 56]).

Прежде чем переходить в уравнениях релятивистской гидродинамики к случаю одного пространственного измерения, заметим, что из уравнения (6.28) после его умножения на 4-вектор  $u_i$  и использования термодинамических соотношений раздела 6.2 ( $\epsilon + p_g = Ts_e$ ,  $d\epsilon = Tds_e$ ) вытекает закон сохранения энтропии

$$\partial(s_e u_k)/\partial x_k = 0. \quad (6.32)$$

Уравнение (6.32) выражает свойство адиабатичности гидродинамического движения. С помощью (6.32) уравнение (6.28) представляется в виде

$$(\epsilon + p_g) u_k \partial u_i / \partial x_k + u_i u_k \partial p_g / \partial x_k - \partial p_g / \partial x_i = 0,$$

который с помощью термодинамических соотношений  $\epsilon + p_g = Ts_e$ ,  $dp_g = s_e dT$  упрощается:

$$u_k \partial(u_i T) / \partial x_k - \partial T / \partial x_i = 0. \quad (6.33)$$

В случае одномерного разлета уравнение (6.33) переходит в соотношение

$$\partial(u_0 T) / \partial x = \partial(u_x T) / \partial t, \quad (6.34)$$

где  $u_0$ ,  $u_x$  — временная и пространственная компоненты 4-скорости  $u_i$ .

Уравнение (6.34) при начальных условиях, обсуждавшихся выше, и при уравнении состояния (6.20) имеет точное решение в следующей параметрической форме [58]:

$$t = \text{ch } y \frac{\partial \chi}{\partial T} - \frac{1}{T} \text{sh } y \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad x = \text{sh } y \frac{\partial \chi}{\partial T} - \frac{1}{T} \text{ch } y \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (6.35)$$

где  $y$  — быстрота элемента адронной жидкости в Ц-системе ( $v = \text{th } y$ ,  $v$  — скорость этого элемента),  $T$  — температура элемента с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

Потенциальная функция  $\chi$  выражается через  $y$  и  $T$ :

$$\chi = \frac{M}{\mu \sqrt{s} \sqrt{a}} \int_{-\sqrt{ay}}^{\tau} \exp \left[ \frac{-z(1+a)}{2a} \right] I_0 \left[ \frac{(1-a)}{2a} (z^2 - ay^2)^{1/2} \right] dz, \quad (6.36)$$

где  $\tau = \ln(T/T_0)$ ;  $T_0$  — начальная температура;  $a = c_0^2$ ,  $c_0$  — скорость звука,  $M$  — масса нуклона,  $\mu$  — масса пиона,  $l = (1/\mu)(2M/\sqrt{s})$  — продольный размер начального объема адронной жидкости, релятивистски сжатый в  $(2M/\sqrt{s})$  раз [56, 58]. Вводя обозначение  $\psi = \chi + (\partial \chi / \partial \tau)$  и используя следующую формулу для энтропии движущегося элемента адронной жидкости \*):

$$dS = s_e(u_0 dx - u_x dt),$$

\*) Эта формула позволяет учесть неодновременность превращения элементов адронной жидкости в адроны [46, 56].



и формулы (6.35), находим

$$dS = -s_e \exp(-\tau) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} d\tau + a \frac{\partial \psi}{\partial \tau} dy \right). \quad (6.37)$$

Условие начала распада элемента адронной жидкости на легкие адроны есть  $T = T_f \approx \mu$ . При этом величина  $\tau = \tau_f = \ln(T_f/T_0) = \text{const}$  и в области образования адронов в (6.37) остается только одно второе слагаемое в круглых скобках. Поэтому распределение энтропии элементов по быстрой скорости выражается формулой

$$\frac{dS}{dy} = -as_e \exp(-\tau_f) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_{\tau = \tau_f}$$

С учетом определения величины  $\psi$  и формулы (6.36) находим

$$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = \frac{(1-a)}{4\sqrt{a}} \left[ I_0(z_f) - \frac{\tau_f I_1(z_f)}{(\tau_f^2 - ay^2)^{1/2}} \right], \quad (6.38)$$

где  $S_0$  — полная энтропия системы, заключенная в начальном объеме,  $z_f = (1-a)(z_f^2 - ay^2)^{1/2}/2a$ . Поскольку энтропия пропорциональна числу элементов жидкости,  $S \sim N$ , то распределение (6.38) описывает и распределение элементов жидкости по быстрой скорости. При  $|\tau_f| \gg \sqrt{ay}$  ( $z_f \gg 1$ ) это распределение можно представить в приближенной форме [17, 46, 56]:

$$\frac{dN}{dy} \approx \frac{N}{\sqrt{2\pi L}} \exp\left(-\frac{y^2}{2L}\right). \quad (6.39)$$

При выводе (6.39) использовались асимптотические формулы для функций Бесселя мнимого аргумента  $I_0(z_f)$  и  $I_1(z_f)$  [41]. Параметр  $L$  в распределении (6.39) определяется начальной температурой  $T_0$ :

$$L = \frac{2}{1-a} |\tau_f| = \frac{2}{1-a} \ln \frac{T_0}{T_f}. \quad (6.40)$$

Используя термодинамическое соотношение (6.19), находим

$$(T_0/T_f) = (\epsilon_0/\epsilon_f)^{a/(1+a)} = (s/2M\mu)^{a/(1+a)} \quad (6.41)$$

(начальный объем  $V \sim \mu^{-3}$ ). В результате параметр  $L$  (6.40) выражается через первичную энергию:

$$L \approx \frac{2a}{(1-a^2)} \ln \frac{s}{2M\mu}. \quad (6.42)$$

При  $a = 1/3$  (уравнение состояния релятивистского идеального газа) более аккуратные оценки дают для параметра  $L$  следующее выражение [46, 56]:

$$L = 0,56 \ln(E_0/M) + 1,6, \quad (6.43)$$

где  $E_0 \approx s/2M$  — энергия первичного нуклона в Л-системе в  $NN$  (или  $N\bar{N}$ )-соударении.

Распределение адронов по быстрой скорости. Формула (6.39) характеризует распределение по быстрой скорости элементов адронной жидкости (кварк-глюонной плазмы) в момент их превращения в адроны, а не адронное распределение по быстрой скорости. Основное предположение большинства моделей множественного образования (в том числе и гидродинамической теории) о распределении адронов, испускаемых элементами адронной жидкости, состоит в том, что это распределение в системе покоя элемента совпадает с распределением бозонов или фермионов, подчиняющихся уравнению состояния релятивистского идеального газа ( $a = 1/3$ ):

$$dn_{B,F} = g_{B,F} [\exp(E^*/T) \mp 1]^{-1} d^3p^*/(2\pi)^3, \quad (6.44)$$

где  $T$  — температура, при которой происходит излучение адронов элементом,  $g_{B,F}$  — спиновые (изоспиновые) статистические веса бозонов или фермионов, соответственно,  $E^*$ ,  $p^*$  — энергия и импульс бозона (фермиона) в системе покоя элемента адронной жидкости. Распределение (6.44) нормировано на число квантовых состояний в единице объема жидкости. Верхний знак в квадратных скобках правой части формулы (6.44) относится к случаю бозонов, нижний — к случаю фермионов.

Пусть элемент жидкости движется с быстрой скоростью  $y$  (скоростью  $v$ ) в Ц-системе реакции множественного образования адронов (6.1). Тогда быстрая скорость вторичного адрона  $y_h$  в Ц-системе реакции (6.1) связана с быстрой скоростью  $y^*$  в системе покоя элемента жидкости следующим соотношением (свойство аддитивности переменной быстрой скорости, см. (5.35)):

$$y_h = y^* + y, \quad (6.45)$$

где  $y$  — быстрая скорость элемента жидкости в Ц-системе реакции,  $y^* = (1/2) \ln[(1+v)/(1-v)]$ ,  $v$  — скорость элемента в этой системе. Распределение (6.44) можно преобразовать в распределение по быстрой скорости  $y_h$  и поперечному импульсу адрона  $p_\perp$ , используя соотношения

$$E^* = m_\perp \text{ch } y^* = m_\perp \text{ch}(y_h - y), \quad d^3p^* = m_\perp \text{ch}(y_h - y) dy dy_\perp. \quad (6.46)$$

В результате находим распределение адронов, испущенных элементом жидкости, в Ц-системе реакции (6.1):

$$\begin{aligned} f_{B,F}(y_h - y, p_\perp) &= \frac{d^3n_{B,F}}{dy dy_\perp d^2p_\perp} = \\ &= \frac{g_{B,F} m_\perp \text{ch}(y_h - y)}{(2\pi)^3} \left\{ \exp \left[ \frac{m_\perp}{T_f} \text{ch}(y_h - y) \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

где  $T_f \approx \mu$ . Если теперь распределение (6.47) умножить на распределение элементов адронной жидкости по быстрой скорости (6.39) и проинтегрировать по этой переменной, то получим распределение вторичных адронов:

$$\frac{dN_{B,F}}{dy dy_\perp d^2p_\perp} \sim \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy f_{B,F}(y_h - y, p_\perp) \Phi(y), \quad (6.48)$$

где  $\Phi(y) = (2\pi L)^{-1/2} \exp(-y^2/2L)$  — распределение элементов по быстрой скорости (6.39) или (6.38).

#### 6.4. Следствия термодинамической модели

Состав вторичных частиц. В рамках статистического и гидродинамического подходов процесс образования адронов осуществляется в момент, когда в равновесной статистической системе — расширяющемся объеме адронной материи, элементе адронной жидкости или кварк-глюонной плазмы плотность энергии и температура достигают критических значений, характерных для адронов.

До сих пор мы не различали распределения кварков и адронов. Однако здесь возникает одна принципиальная проблема: моделирование процесса перехода кварков в адроны (адронизация). Эта проблема, далекая от завершения, существует в любой современной теории множественных процессов. В рамках гидродинамической теории можно предложить два варианта адронизации. В простейшем варианте допускается, что этот процесс осуществляется при постоянной температуре (обычно полагают  $T_f \sim \mu$ ). В этом простейшем варианте импульсное распределение вторичных адронов в системе покоя элемента жидкости

$$dn_{B,F} = g_{B,F} [\exp(E^*/T) \mp 1]^{-1} d^3p^*/(2\pi)^3$$

(см. (6.44)). Это распределение нормировано на плотность адронов данного сорта. Независимо от динамики движения элементов адронной материи и ее типа в рамках термодинамического подхода (6.44) можно подсчитать концентрацию адронов различных сортов, испускаемых данным элементом виртуальной фазы. Ввиду того что при этом распределение (6.44) интегрируется по всему импульсному пространству, индивидуальные кинематические характеристики каждого элемента нивелируются. Поэтому концентрации адронов, вычисленные таким способом, могут оказаться более надежными предсказаниями модели по сравнению с дифференциальным распределением по различным кинематическим переменным вторичных адронов.

На основе формулы (6.44), проводя интегрирование по всем компонентам импульса вторичных адронов в системе покоя распадающегося на адроны элемента, получаем для бозонов и фермионов следующий результат [52]:

$$n_{B,F}^{(i)} = \frac{g_{B,F}^{(i)}}{2\pi^2} T_f^3 I_{B,F}(z_i), \quad (6.49)$$

где индексом  $i$  отмечен сорт адрона, масса адрона равна  $m_i$ , параметр  $z_i = m_i/T_f$ , а функции  $I_{B,F}(z_i)$  определены следующим образом:

$$I_{B,F}(z_i) = z_i^3 \int_0^\infty du u^2 \{ \exp[z_i(1+u^2)^{1/2}] \mp 1 \}^{-1}, \quad (6.50)$$

где переменная интегрирования  $u = (p^*/m_i)$ , а верхний предел интеграла можно положить равным бесконечности вследствие хорошей сходимости интеграла в области значений  $u \geq 1$ .

Интеграл (6.50) нетрудно оценить в предельных случаях:

$$\begin{aligned} T_f &\ll m_i; & I_{B,F}(z_i) &\approx (\pi/2)^{1/2} z_i^{3/2} \exp(-z_i), \\ T_f &\approx m_i; & I_B(z_i) &= 1,8, \quad I_F \approx 1,5, \\ T_f &\gg m_i; & I_B &\approx 2,4, \quad I_F \approx 2,8. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Если  $T_f \approx \mu$ , то последний случай не осуществляется на практике, так как не существует адронов легче пиона. Приближенная оценка интегралов  $I_{B,F}(z_i)$  при  $z_i \gg 1$  применима практически для всех адронов, кроме пионов. Выходы адронов различных сортов по отношению к пионам оцениваются по формуле

$$\frac{n_{B,F}}{n_\pi} = \frac{g_{B,F}}{5,4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{\mu}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i}{\mu}\right). \quad (6.52)$$

В (6.52) статистический вес пионов  $g_\pi = 2T_\pi + 1 = 3$ . Оценка относительных выходов заряженных пионов, каонов и антипротонов на основе (6.52) дает следующий результат:  $n_{\pi^\pm} : n_{K^\pm} : n_{\bar{p}} \approx 1:0,1:0,01$ , который неплохо соответствует экспериментальным данным.

Другая модель адронизации в рамках гидродинамической теории предполагает, что взаимодействие между кварками выключается в момент окончания одномерной стадии [53, 59]. Основанием для такого предположения служили конкретные оценки [60] бокового разлета. Было продемонстрировано, что после окончания одномерной стадии разлет элементов жидкости происходит практически инерциально, что и свидетельствует об окончании взаимодействия между элементами жидкости и начала процесса адронизации.

В рамках такой модели адронизации происходит при температуре  $T_f \gtrsim \mu$ . Величина  $T_f$  слабо зависит от значений параметра  $\sqrt{s}$  и быстрого  $y$ . Подобный подход объясняет [59] изобилие вторичных резонансов, которое проявляется, по-видимому, при высоких энергиях на опыте. Недостаток второй модели адронизации — отсутствие простых аналитических выражений, приводящее к необходимости численного счета.

Распределение адронов по поперечным импульсам. Одним из наиболее впечатляющих результатов применения термодинамических распределений (6.44) является предсказание для распределения вторичных адронов по поперечным импульсам. Результаты анализа гидродинамической модели в трехмерном случае (см., например, [57, 60]) свидетельствуют о том, что вплоть до очень высоких энергий ( $\sqrt{s} \lesssim 10^2 - 10^3$  ГэВ) боковой гидродинамический разлет практически не сказывается на характере распределения вторичных адронов по поперечным импульсам. Это распределение определяется, главным образом, не гидродинамическим, а тепловым движением составляющих элемента адронной жидкости [17, 57]. В собственной системе элемента импульсное распределение вторичных адронов, определяется формулами (6.44). Если пренебречь боковым гидродинамическим разлетом элементов, то распределение (6.44), проинтегрированное по про-

дольным компонентам импульсов бозонов или фермионов в системе покоя элемента, превратится в распределении только по поперечным компонентам импульсов вторичных адронов. При продольных релятивистских преобразованиях это распределение остается инвариантным независимо от закономерностей продольного движения элементов. Поэтому полученный таким образом результат характеризует распределение по поперечным импульсам вторичных адронов.

Следовательно, распределение вторичных бозонов или фермионов по поперечным импульсам в рамках гипотезы о статистическом равновесии в элементе виртуальной фазы (гидродинамическая модель) или во всем объеме возбужденной адронной материи (статистическая модель с расширяющимся объемом) определяется интегралом

$$\frac{d^2 n_{B,F}}{d^2 p_1} = \frac{g_{B,F}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \left\{ \exp \left[ \frac{(p_{\parallel}^2 + m_1^2)^{1/2}}{T_f} \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (6.53)$$

где  $m_1^2 = p_1^2 + m^2$ ,  $m$  — масса детектируемого адрона. Как уже отмечалось, распределение (6.53) нормировано на плотность (концентрацию) адронов данного сорта. В данном случае конкретная нормировка (6.53) несущественна, поскольку в рассматриваемой ситуации предсказывается лишь форма распределения адронов по  $p_1$ , а не числовое значение инклюзивного дифференциального сечения реакции по поперечному импульсу. Распределение (6.53) удобно представить в следующем виде:

$$\frac{dn_{B,F}}{p_1 dp_1} \sim m_1 \int_0^{\infty} dx \{ \exp [z_1(x^2 + 1)^{1/2}] \mp 1 \}^{-1}, \quad (6.54)$$

где  $z_1 = (m_1/T_f)$ . Распределение (6.54) является функцией только переменной  $m_1$ , которая в последнее время широко используется для представления экспериментальных распределений по поперечным импульсам. В рамках термодинамического подхода эта переменная возникает совершенно естественно, характеризуя энергию вторичных частиц, вылетающих под углом около  $90^\circ$  к направлению оси соударения первичных адронов. Интеграл в (6.54) можно вычислить, представив подынтегральную функцию в виде ряда:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \{ \exp [z_1(x^2 + 1)^{1/2}] \mp 1 \}^{-1} &= \\ &= \int_0^{\infty} dx \sum_{r=1}^{\infty} (\pm 1)^{r+1} \exp [-rz_1(x^2 + 1)^{1/2}]. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в этом ряду является интегральным представлением функции Макдональда [41]:

$$\int_0^{\infty} dx \exp [-rz_1(x^2 + 1)] = K_1(rz_1).$$

В результате распределение (6.54) выражается в виде следующего ряда:

$$dn_{B,F}/p_1 dp_1 \sim m_1 \sum_{r=1}^{\infty} (\pm 1)^{r-1} K_1(rm_1/T_f). \quad (6.55)$$

При  $m_1 \gtrsim T_f \approx \mu$  в сумме (6.55) существенно только первое слагаемое. Используя асимптотическое выражение для функции  $K_1(x) \approx (\pi/2x)^{1/2} \exp(-x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ , получаем

$$dn_{B,F}/p_1 dp_1 \sim m_1^{1/2} \exp(-m_1/T_f). \quad (6.56)$$

Заметим, что приближенная формула (6.56) хорошо воспроизводит поведение распределения (6.55) даже для вторичных пионов, когда условие  $m_1 \gtrsim \mu$  выполняется лишь в области значений поперечных импульсов  $p_1 \gtrsim (1-2)\mu$ . При описании экспериментальных данных в последнее время часто используют следующую параметризацию распределений адронов различных сортов по поперечным импульсам в области значений  $p_1 \lesssim (1.5-2)$  ГэВ/с (см., например, [29]):

$$dN/p_1 dp_1 \sim \exp(-bm_1). \quad (6.57)$$

где "подгоночный" параметр  $b$  для адронов с массами  $m \lesssim 1$  ГэВ оказывается равным  $b = 6-7$  ГэВ $^{-1}$ . В то же время оцененная по наблюдаемым распределениям температура  $T_f$  равна  $T_f \approx 0.15-0.16$  ГэВ. Сравнение значений параметров  $b$  и  $T_f^{-1}$  демонстрирует их удивительное совпадение. Кроме того, на опыте трудно различить поведение (6.56) и (6.57), особенно в случае адронов, более тяжелых, чем пионы. Близкое соответствие между предсказанием (6.56) и экспериментальными результатами (6.57) является несомненным успехом термодинамической модели.

В случае вторичных пионов в области поперечных импульсов  $p_1 \gg \mu$  распределение (6.56) близко по форме к экспоненте:

$$dn_{\pi}/p_1 dp_1 \sim p_1^{1/2} \exp(-p_1/T_f).$$

Среднеквадратичное значение поперечного импульса вторичных пионов, вычисленное с помощью распределения (6.56),

$$[\langle p_1^2 \rangle_{\pi}]^{1/2} \approx 2.4 \mu \approx 0.34 \text{ ГэВ},$$

находится в хорошем соответствии с данными опыта.

В случае тяжелых адронов в области поперечных импульсов  $p_1 \lesssim m$  распределение (6.56) представляется функцией Гаусса

$$dn/p_1 dp_1 \sim \exp(-p_1^2/2mT_f). \quad (6.58)$$

Среднеквадратичное значение поперечного импульса, вычисленное на основе (6.58)

$$[\langle p_1 \rangle]^{1/2} \approx (2mT_f)^{1/2}. \quad (6.59)$$

Формула (6.59) предсказывает медленный рост среднеквадратичного им-

пульса с увеличением массы  $m$  наблюдаемых адронов. Это предсказание оправдывается на опыте, по крайней мере, качественно: средние поперечные импульсы тяжелых адронов больше, чем легких.

Как уже отмечалось, весьма вероятно, что при высоких энергиях ( $\sqrt{s} \gtrsim 50$  ГэВ) также значительная часть вторичных пионов образуется в результате распада резонансов, что может создать впечатление непригодности приведенных выше формул для аппроксимации распределений по поперечным импульсам. Однако в рамках модели адронизации, происходящей в момент окончания одномерной стадии, было показано [59], что образование пионов при распаде легких резонансов практически не влияет на форму распределения  $dn/dp_{\perp}$ . Этот результат — следствие того, что распределение  $dn/dp_{\perp}$  характеризуется резким максимумом (функция Планка), и кинематики двух- и трехчастичных распадов (гл. 2 и 3).

Отметим далее, что в области поперечных импульсов  $p_{\perp} \gtrsim 2$  ГэВ экспериментальные данные указывают на смену экспоненциального режима (6.56) на степенной. В этой области, по-видимому, начинают играть роль уже не коллективные эффекты взаимодействия адронных составляющих (кварков, глюонов), а парные жесткие соударения этих составляющих с большими передачами энергии и импульса. Такие соударения изучаются в рамках кинематики двухчастичных реакций на основе метода теории возмущений в квантовой хромодинамике [55].

Завершая эту главу, отметим, что статистические, термодинамические и гидродинамические подходы к множественным процессам, основанные на обобщениях кинематической теории многочастичного статистического веса, стимулировали развитие как теоретических, так и экспериментальных исследований в физике высоких энергий. Целый ряд достижений этого направления находит в настоящее время применение в задачах теоретического описания коллективных взаимодействий кварков и глюонов на расстояниях порядка адронных размеров, где взаимодействие адронных составляющих велико и не может быть описано по теории возмущений (см., например, [54]). В этом смысле статистические и другие коллективные методы вступили, образно говоря, в "эпоху Возрождения". Это обстоятельство оправдывает то внимание, которое было им уделено в данной книге.

## КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### 7.1. Кинематические переменные лептон-нуклонного взаимодействия

**Общие сведения о лептон-нуклонных процессах.** Множественное образование адронов осуществляется не только в процессах взаимодействия адронов. Оно может осуществляться в процессах лептон-нуклонного взаимодействия, идущих за счет электромагнитного или слабого взаимодействия в комбинации с сильным. Примерами таких процессов являются реакции (рис. 7.1)

$$l^{\pm} + N \rightarrow l^{\pm} + X, \quad (7.1)$$

$$\nu_l(\bar{\nu}_l) + N \rightarrow l^{\mp} + X, \quad (7.2)$$

$$\nu_l(\bar{\nu}_l) + N \rightarrow \nu_l(\bar{\nu}_l) + X, \quad (7.3)$$

где  $l^{\pm} = e^{\pm}, \mu^{\pm}$  — заряженные лептоны,  $\nu_l(\bar{\nu}_l)$  — соответствующие им нейтрино (антинейтрино),  $X$  — совокупность адронов, называемая иногда адронным ливнем или адронной струей. При различных экспериментальных

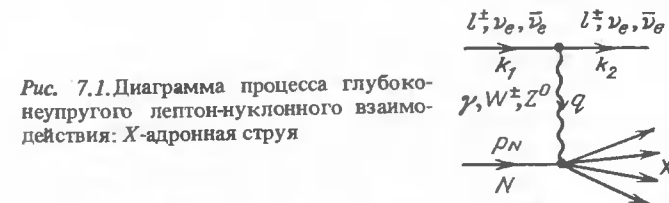


Рис. 7.1. Диаграмма процесса глубоко-неупругого лептон-нуклонного взаимодействия:  $X$ -адронная струя

условиях в реакциях (7.1), (7.2) детектируются либо только вторичные заряженные лептоны, либо измеряются также кинематические характеристики некоторых сортов вторичных адронов из струи  $X$ . Реакция (7.1) обусловливается комбинацией электромагнитного и сильного взаимодействий. Ее механизм на диаграммном языке представлен на рис. 7.1.

Налетающий на нуклонную мишень  $N$  заряженный лептон  $l^{\pm}$  с 4-импульсом  $k_1$  испускает виртуальный фотон  $\gamma$  с 4-импульсом  $q$  ( $q^2 < 0$ ) и превращается во вторичный лептон  $l^{\pm}$  с 4-импульсом  $k_2$ . Виртуальный фотон поглощается нуклоном-мишенью, образуя вторичные адроны. Процесс испускания виртуального фотона заряженным лептоном — это чисто электромаг-

нитный процесс. Реакция поглощения виртуального фотона нуклоном

$$\gamma + N \rightarrow X \quad (7.4)$$

— следствие электромагнитного и сильного взаимодействий. Ее механизм можно представить себе следующим образом [28]. Вследствие электромагнитного взаимодействия фотон со спином  $S_\gamma = 1$  и отрицательной внутренней четностью  $P_\gamma = -1$  переходит в адронное состояние с тем же спином и четностью, которое сильно взаимодействует с нуклоном-мишенью.

Процесс типа (7.4) называется реакцией фоторождения адронов на нуклонах. Он осуществляется как с помощью виртуальных фотонов, так и наблюдается экспериментально в пучках реальных фотонов (в этом случае  $q^2 = 0$ ). Если реакция (7.1) осуществляется в пучке электронов (позитронов), то ее называют процессом электророждения адронов. В случае мюонных пучков — эта реакция называется процессом мюонорождения адронов. Соответственно, реакция (7.2) — нейтринорождение адронов через взаимодействие заряженных слабых лептонных и адронных токов. Реакция (7.3) — нейтринорождение адронов через взаимодействие нейтральных слабых токов нейтрино и адронов \*).

Взаимодействия типа (7.2), (7.3) осуществляются в соответствии со следующим механизмом (рис. 7.1): первичное нейтрино (антинейтрино) испускает заряженный или нейтральный виртуальный квант слабого взаимодействия —  $W^\pm$ - или  $Z^0$ -бозон, превращаясь в заряженный лептон или вторичное нейтрино (антинейтрино).  $W^\pm$ -( $Z^0$ )-бозоны, взаимодействуя с нуклоном  $N$ , образуют вторичные адроны в реакции

$$W^\pm(Z^0) + N \rightarrow X. \quad (7.5)$$

Процесс испускания  $W^\pm(Z^0)$ -бозона нейтрино (антинейтрино) обусловливается слабым взаимодействием. Процесс (7.5) осуществляется за счет комбинации слабого и сильного взаимодействий.

Подчеркнем, что процесс образования адронной струи  $X$  ((7.1) — (7.3)) осуществляется за счет реакций (7.4), (7.5), в которых фотон и  $W^\pm(Z^0)$ -бозоны, переходя в виртуальное адронное состояние, удовлетворяющее законам сохранения квантовых чисел, играют такую же роль, как первичные адроны в процессах сильного взаимодействия, приводящих к множественному образованию вторичных адронов. Если в конечном состоянии реакции (7.5) вместо адронной струи образуется лишь один вторичный барион ( $X = N, \Lambda, \Sigma, \Lambda^*$  и т.п.), то реакции (7.2), (7.3) называют квазиупругими. Среди реакций (7.3) имеется и процесс упругого рассеяния нейтрино (антинейтрино) на нуклонах:

$$\nu_l(\bar{\nu}_l) + N \rightarrow \nu_l(\bar{\nu}_l) + N.$$

Размерные и безразмерные кинематические переменные в лептон-нуклонных процессах. Реакции (7.1) — (7.3) аналогичны инклюзивным адронным процессам, если в качестве инклюзивной частицы в этих реакциях рассмат-

\*) Детально с динамической теорией лептон-нуклонных процессов можно ознакомиться, например, по книгам [11, 28, 55, 61, 62].

ривать вторичные лептоны  $l^\pm, \nu_l, \bar{\nu}_l$ . Конечно, к реакции (7.3) эта аналогия применима только формально, поскольку вторичные нейтрино (антинейтрино) не регистрируются. При детектировании только вторичных заряженных лептонов  $l^\pm$ -процессы (7.1), (7.2) являются инклюзивными реакциями. Такие процессы можно формально рассматривать как квазидвухчастичные, принимая адронную струю за компаунд-частицу с переменной эффективной массой  $W$ . Эти реакции описываются инвариантными кинематическими переменными

$$s = (k_1 + p_N)^2, \quad t = q^2 = (k_1 - k_2)^2, \quad (7.6)$$

$$W^2 = m_X^2 = (k_1 + p_N - k_2)^2. \quad (7.7)$$

Инвариант  $s$  отвечает квадрату полной энергии начального состояния в Ц-системе изучаемой реакции:

$$s = (E_1^* + E_N^*)^2.$$

Здесь  $E_1^*$  — энергия первичного лептона в Ц-системе,  $E_N^*$  — энергия первичного нуклона в той же системе. В Л-системе

$$s = m_1^2 + M^2 + 2ME_1. \quad (7.8)$$

Здесь  $m_1$  — масса первичного лептона,  $M$  — масса нуклона. Инвариант  $t = q^2$ , называемый квадратом переданного 4-импульса от лептона к адронам, в Ц-системе равен

$$t = m_1^2 + m_2^2 - 2E_1^*E_2^* + 2k_1^*k_2^*\cos\theta_2^*, \quad (7.9)$$

где  $m_2$  — масса вторичного лептона,  $\theta_2^*$  — угол вылета,  $E_2^*, k_2^* = |k_2^*|$  — энергия и модуль импульса вторичного лептона в Ц-системе,  $k_1^* = |k_1^*|$  — модуль импульса первичного лептона.

Энергии лептонов  $E_1^*$  и  $E_2^*$  выражаются через инварианты  $s, W^2$  и массы частиц:

$$E_1^* = (s + m_1^2 - M^2)/2\sqrt{s}, \quad E_2^* = (s + m_2^2 - W^2)/2\sqrt{s}. \quad (7.10)$$

Модуль импульсов лептонов выражается через величины  $s, W^2$  и массы частиц:  $|k_{1,2}^*| = k_{1,2}^* = [(E_{1,2}^*)^2 - m_{1,2}^2]^{1/2}$ ,

$$k_1^* = [s - (M + m_1)^2]^{1/2}[s - (M - m_2)^2]^{1/2}/2\sqrt{s}, \quad (7.11)$$

$$k_2^* = [s - (W + m_2)^2]^{1/2}[s - (W - m_2)^2]^{1/2}/2\sqrt{s}.$$

При пренебрежении массами лептонов формулы (7.9), (7.11) существенно упрощаются:

$$t = -2E_1^*E_2^*(1 - \cos\theta_2^*) = -4E_1^*E_2^*\sin^2(\theta_2^*/2), \quad (7.12)$$

$$k_1^* = E_1^* = (s - M^2)/2\sqrt{s}, \quad k_2^* = E_2^* = (s - W^2)/2\sqrt{s}. \quad (7.13)$$

В том же приближении энергия первичного нуклона в Ц-системе

$$E_N^* = (s + M^2)/2\sqrt{s}. \quad (7.14)$$

Инвариант  $t$  можно выразить и через кинематические переменные в Л-системе:

$$t = -4 E_1 E_2 \sin(\theta_2/2). \quad (7.15)$$

Здесь  $E_2$ ,  $\theta_2$  — энергия и угол вылета вторичного лептона. Инвариант  $W^2 = m_X^2$  выражается через энергию  $E_2^*$  вторичного лептона в Ц-системе и инвариант  $s$  согласно формулам (7.10), (7.13):

$$W^2 = s - 2 E_2^* \sqrt{s} + m_2^2. \quad (7.16)$$

Этот же инвариант через кинематические переменные Л-системы и инвариант  $t$  представляется соотношениями

$$W^2 = (q + p_N)^2 = t + 2 M \nu + M^2. \quad (7.17)$$

Символ  $\nu$  — разность энергий лептонов в Л-системе:

$$\nu = E_1 - E_2. \quad (7.18)$$

Переменная  $\nu$  в Л-системе имеет смысл энергии, переданной от первичного лептона вторичным адронам. Их полная энергия  $E_X = \nu + M$ . Часто величину  $\nu$  называют лабораторной энергией виртуального фотона или  $W^+(Z^0)$ -бозона (рис. 7.1), а переданный импульс  $q = k_1 - k_2 = p_X$  называют импульсом этой виртуальной частицы. Квадрат ее массы

$$t = q^2 = \nu^2 - q^2 \quad (7.19)$$

и удовлетворяет условию  $t < 0$  (см. (7.12), (7.15)). Как следует из проведенного анализа, конечное состояние в процессах (7.1), (7.2) описывается при инклюзивном подходе двумя существенными переменными и одной несущественной: азимутальным углом вылета вторичного лептона  $\varphi_2$ . В силу цилиндрической симметрии задачи распределение событий по этому углу однородно, если первичные лептоны и нуклоны не поляризованы.

Пары существенных кинематических переменных можно выбрать различными способами. Например: 1) переменные  $(E_2, \theta_2)$  измеряются непосредственно в Л-системе; 2) переменные  $(E_2^*, \theta_2^*)$  описывают кинематическое состояние вторичного лептона в Ц-системе (масса адронной струи, ее энергия и импульс выражаются через эти переменные и переменные энергии и импульса начального состояния); 3) переменные  $(t, W^2)$  обеспечивают полностью ковариантное описание процесса; 4) переменные  $(t, \nu)$  традиционно используются для теоретического описания процессов (7.1), (7.2) [11, 28, 55, 61, 62]; 5) безразмерные кинематические переменные определяются следующим образом:

$$x = Q^2/2M\nu, \quad y = \nu/E_1, \quad (7.20)$$

где  $Q^2 = -q^2 \geq 0$ . Переменную  $x$  называют безразмерной (скейлинговой) переменной Бьеркена [63].

Кинематические пределы. Пределы изменения кинематических переменных, описывающих конечное состояние в реакциях (7.1), (7.2) и (7.3), имеют наиболее простой вид в Ц-системе этих процессов. Угол вылета леп-

тона  $\theta_2^*$  изменяется в этой системе в пределах

$$0 \leq \theta_2^* \leq \pi, \quad (7.21)$$

а его энергия  $E_2^*$  в следующей области:

$$0 \leq E_2^* \leq (s - M^2)/2\sqrt{s}. \quad (7.22)$$

При выводе (7.22) масса лептона  $m_2$  полагалась равной нулю, а минимальное возможное значение массы адронной струи  $X$  принято равным массе нуклона  $M$ . На основе ограничений (7.21) и (7.22) нетрудно установить соответствующие пределы изменения других пар существенных кинематических переменных. При фиксированном значении  $W^2$  переменная  $Q^2 = -t$  (см. (7.9)) изменяется в следующих границах:

$$0 \leq Q^2 \leq (s - M^2)(s - W^2)/s, \quad (7.23)$$

где величина  $W^2$  ограничена неравенствами

$$M^2 \leq W^2 \leq s. \quad (7.24)$$

Если переменная  $W^2$  может принимать любые значения в области (7.24), то инвариант  $Q^2$  изменяется в пределах

$$0 \leq Q^2 \leq (s - M^2)^2/s. \quad (7.25)$$

При использовании пары переменных  $(t, \nu)$  или, что то же самое,  $(Q^2, \nu)$  нужно сначала выразить  $\nu$  через  $W^2$  и  $Q^2$  (см. (7.17)):

$$\nu = (W^2 + Q^2 - M^2)/2M. \quad (7.26)$$

Из неравенств (7.23) и (7.24) следует, что при фиксированном значении переменной  $Q^2$ , переменная  $W^2$  изменяется в пределах

$$M^2 \leq W^2 \leq s(s - M^2 - Q^2)/(s - M^2). \quad (7.27)$$

Из ограничений (7.27) вытекают следующие ограничения на переменную  $\nu$  при фиксированном значении  $Q^2$ :

$$Q^2/2M \leq \nu \leq [(s - M^2)^2 - Q^2 M^2]/2M(s - M^2). \quad (7.28)$$

При этом  $Q^2$  может изменяться в пределах (7.25). Если же фиксировать переменную  $\nu$ , то инвариант  $Q^2$  изменяется в пределах

$$0 \leq Q^2 \leq 2M\nu, \quad (7.29)$$

переменная  $\nu$  — в пределах

$$0 \leq \nu \leq (s - M^2)/2M = E_1. \quad (7.30)$$

Из определения (7.20) безразмерных кинематических переменных  $x$  и  $y$  и ограничений (7.29), (7.30) вытекают следующие пределы изменения этих переменных:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (7.31)$$



Рассмотрим, далее, кинематические переменные  $(E_2, \theta_2)$  в Л-системе. Пределы их изменения можно установить, если выразить инварианты  $Q^2$  и  $W^2$  через эти переменные и воспользоваться неравенствами (7.23), (7.24). Поскольку

$$Q^2 = 2E_1E_2(1 - \cos \theta_2), \quad W^2 = M^2 - 2M(E_1 - E_2) - Q^2,$$

то из неравенства (7.24) вытекает, что

$$0 \leq E_2 \leq E_1 \left[ 1 + \frac{E_1}{M} (1 - \cos \theta_2) \right]^{-1}. \quad (7.32)$$

Угол вылета  $\theta_2$  изменяется в пределах  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ . Последний вывод справедлив для лептонов с нулевой массой ( $m_2 = 0$ ). Если же  $m_2 \neq 0$ , то пределы изменения переменных  $(E_2, \theta_2)$  усложняются. С помощью кинематических формул, приведенных в гл. 4, 5, нетрудно установить, что при  $m_2 < M$  в области энергий первичных лептонов

$$(E_1)_{\min} \leq E_1 \leq m_2 + (m_2^2 - m_1^2)/2(M - m_2)$$

энергия  $E_2$  изменяется в следующих пределах:

$$(E_2)_{\min} \leq E_2 \leq (E_2)_{\max},$$

где

$$(E_2)_{\max} = \frac{\sqrt{s}(M+E_1)(E_2^*)_{\max} \pm k_1 \cos \theta_2 [s(k_2^*)_{\max}^2 - m_2^2 k_1^2 \sin^2 \theta_2]^{1/2}}{[s + k_1^2 \sin^2 \theta_2]}. \quad (7.33)$$

Здесь

$$(E_1)_{\min} = m_2 + (m_2^2 - m_1^2)/2M, \quad (E_2^*)_{\max} = (s + m_2^2 - M^2)/2\sqrt{s}, \quad (7.33)$$

$$(k_2^*)_{\max} = [(E_2^*)_{\max}^2 - m_2^2]^{1/2}, \quad k_1 = [(E_1)^2 - m_1^2]^{1/2}.$$

Пределы (7.33) осуществляются при условии  $v > (v_2^*)_{\max}$ , где  $v = k_1/(E_1 + M)$  — скорость Ц-системы относительно Л-системы,  $(v_2^*)_{\max}$  — максимальная скорость вторичного лептона в Ц-системе:

$$v_2^* = (k_2^*)_{\max}/(E_2^*)_{\max}.$$

Неравенство  $v > (v_2^*)_{\max}$  определяет указанную выше область энергий первичного лептона, а предельные значения энергии  $E_2$  соответствуют формуле (7.33). Очевидно, что это область энергий находится вблизи порога реакции (7.2). Для реакций (7.1), (7.3), когда  $m_1 = m_2$ , случай (7.33) вообще не реализуется. Если энергия  $E_2$  изменяется в границах (7.33), существует предельный угол вылета вторичного лептона

$$0 \leq \sin \theta_2 \leq \sqrt{s} (k_2^*)_{\max}/m_2 k_1. \quad (7.34)$$

В случае  $m_2 > M$  границы (7.33) имеют место в области энергий

первичного лептона

$$E_1 \geq m_2 + (m_2^2 - m_1^2)/2(m_2 - M).$$

В этой области энергий существует предельный угол вылета (7.34). В области энергий

$$E_1 \geq m_2 - (m_2^2 - m_1^2)/2(m_2 - M)$$

при  $m_2 < M$  и в области

$$(E_1)_{\min} = m_2 + (m_2^2 - m_1^2)/2M \leq E_1 \leq m_2 + (m_2^2 - m_1^2)/2(m_2 - M)$$

при  $m_2 > M$  скорость  $v < (v_2^*)_{\max}$ . Область изменения энергии  $E_2$  при этом определяется неравенствами

$$m_2 \leq E_2 \leq \frac{\sqrt{s}(M+E_1)(E_2^*)_{\max} + k_1 \cos \theta_2 [s(k_2^*)_{\max}^2 - m_2^2 k_1^2 \sin^2 \theta_2]^{1/2}}{s + k_1^2 \sin^2 \theta_2}. \quad (7.35)$$

Угол вылета  $\theta_2$  изменяется здесь в пределах  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ .

Отметим, что случай  $m_2 > M$  отвечает реакциям образования тяжелых лептонов, как гипотетических с электронными или мюонными квантовыми числами, так и уже обнаруженных  $\tau^\pm$ -лептонов в пучке  $\tau$ -нейтрино  $\nu_\tau$  (анти-нейтрино  $\bar{\nu}_\tau$ ). Такие нейтрино могут содержаться в пучке мюонных нейтрино, благодаря нейтринным осцилляциям, поиски которых интенсивно проводятся на ускорителях. В будущем возможна постановка задачи о создании нейтринных пучков, обогащенных  $\nu_\tau$  ( $\bar{\nu}_\tau$ ) за счет лептонных и полулептонных распадов тяжелых очарованных, прелестных и иных мезонов и барионов.

## 7.2. Феноменология упругих и глубоконеупругих лептон-нуклонных процессов

Область глубокой неупругости. Процессы типа (7.1) — (7.3) принято называть глубоконеупругими, если они осуществляются в области больших передач энергии и импульса от лептонов к адронам. Формально область глубокой неупругости определяется сильными неравенствами

$$Q^2 \gg M^2, \quad \nu \gg M \quad (7.36)$$

при условии, что безразмерная переменная  $x = Q^2/2M\nu$  остается фиксированной ( $x \neq 0$ ):

$$x = \lim_{\substack{Q^2 \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty}} (Q^2/2M\nu) = \text{const} < 1. \quad (7.37)$$

На практике обычно область глубокой неупругости процессов типа (7.1) — (7.3) определяют неравенствами

$$Q^2 \gtrsim 1-2 \text{ ГэВ}^2, \quad \nu \gtrsim 2-3 \text{ ГэВ}. \quad (7.38)$$

Выбор ограничений (7.38) связан с одной эмпирической особенностью спектров. При фиксированных значениях  $Q$  в области (7.38) в поведении дифференциальных сечений процессов (7.1), (7.2) как функций переменной  $\nu$  (или  $W$ ) при  $\nu \gtrsim 2-3$  ГэВ отсутствуют нерегулярности в виде узких максимумов, связанных с образованием одиночных нуклонных резонансов в конечном состоянии (см., например, [61]). Именно в этой области экспериментально было обнаружено своеобразное поведение дифференциальных сечений реакций (7.1), (7.2) по переменным  $Q^2$  и  $\nu$ . Чтобы пояснить наблюдаемые результаты и их интерпретацию, необходимо дать краткое введение в общую феноменологическую схему описания процессов электророжения и нейтринорождения адронов. (Подробнее см., например, [11, 28, 55, 61, 62].)

Феноменология лептон-нуклонных процессов. Теория лептон-нуклонных реакций типа (7.1) – (7.3) приводит к следующим общим формулам для дифференциальных сечений этих процессов. В случае процесса электророжения (7.1)

$$\frac{d^2 \sigma_{em}}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2 E_2 \cos^2(\theta_2/2)}{Q^4 E_1} \left[ W_2^{em}(Q^2, \nu) + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} W_1^{em}(Q^2, \nu) \right]; \quad (7.39)$$

в случае процесса нейтринорождения (7.2)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{\nu, \bar{\nu}}}{dQ^2 d\nu} = & \frac{G^2 E_2}{2\pi E_1} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ W_2^{\nu, \bar{\nu}}(Q^2, \nu) + 2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) W_1^{\nu, \bar{\nu}}(Q^2, \nu) \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{(E_1 + E_2)}{M} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) W_3^{\nu, \bar{\nu}}(Q^2, \nu) \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

В формулах (7.39), (7.40) использованы следующие обозначения:  $\alpha = e^2 = 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $G = 10^{-5}/M^2$  – константа слабого взаимодействия,  $E_2$ ,  $\theta_2$  – энергия и угол вылета вторичного лептона в Л-системе,  $E_1$  – энергия налетающего лептона в той же системе.

Функции  $W_{1,2}^{em}(Q^2, \nu)$  называются электромагнитными структурными функциями нуклона (протона или нейтрона). Функции  $W_{1,2,3}^{\nu, \bar{\nu}}(Q^2, \nu)$  – структурные функции слабого заряженного нуклонного тока (перехода протона или нейтрона в систему адронов  $X$  за счет поглощения  $W^\pm$ -бозона). Верхний знак перед слагаемым в формуле (7.40), содержащим фактор  $W_3^{\nu, \bar{\nu}}(Q^2, \nu)$  отвечает реакции (7.2) с участием нейтрино, нижний – антинейтрино.

В случае, когда в процессе (7.1) конечное адронное состояние  $X$  является одиночным нуклоном  $N$  или нуклонным резонансом ( $X = \Delta(1238)$ ,  $N^*(1520)$ ,  $N^*(1688)$  и т.п. ([10]), реакция называется упругой или квазиупругой. При этом переменная  $\nu$  уже не независима; в упругой реакции она связана с  $Q^2$  соотношением

$$\nu = Q^2 / 2M. \quad (7.41)$$

В квазиупругих процессах

$$\nu = [Q^2 + (M_2 - M)^2] / 2M, \quad (7.42)$$

где  $M_2$  – масса нуклонного резонанса  $\Delta$ ,  $N^*$  и т.п.

Факторы  $W_{2,1}^{em}(Q^2, \nu)$  в случае упругого  $lN$ -рассеяния выражаются через электромагнитные формфакторы нуклона (протона или нейтрона)  $G_{E,M}(Q^2)$ :

$$W_1^{em}(-Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right), \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} W_2^{em}(Q^2, \nu) = \\ = 4M^2 \left[ G_E^2(Q^2) + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2(Q^2) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) (4M^2 + Q^2)^{-1}, \end{aligned}$$

где  $G_{E,M}(Q^2)$  – саксовские электромагнитные ( $E$  – электрический,  $M$  – магнитный) формфакторы протона или нейтрона [9], учитывающие пространственное распределение электрического заряда и магнитного момента в протяженном нуклоне. Экспериментальные данные свидетельствуют о следующей зависимости электромагнитных формфакторов протона и нейтрона от величины  $Q^2$  в интервале значений  $Q^2 \lesssim 20-30$  ГэВ<sup>2</sup> (см., например, [61]):

$$G_E^p(Q^2) = G_M^p(Q^2) / \mu_p = G_M^n(Q^2) / |\mu_n| \approx (1 + Q^2/m_V^2)^{-2}, \quad (7.44)$$

$$G_E^n(Q^2) \approx 0, \quad m_V^2 = 0,71 \text{ (ГэВ)}^2.$$

Здесь индексы  $p, n$  отвечают протонной и нейтронной мишеням,  $\mu_{p,n}$  – полные магнитные моменты протона и нейтрона в ядерных магнетонах Бора ( $\mu_p = 2,79$ ,  $\mu_n = -1,91$ ).

Аналогичное (7.44) поведение с ростом  $Q^2$  имеют и формфакторы квазиупругих электромагнитных переходов  $N \rightarrow \Delta$ ,  $N^*$  и слабых переходов  $n \leftrightarrow p$ ,  $N \rightarrow \Delta$ ,  $N^*$  с изменением заряда бариона [61].

Отметим следующие свойства дифференциальных сечений (7.39), (7.40). Выражение, стоящее перед квадратными скобками в правой части равенства (7.39) совпадает с формулой для дифференциального сечения упругого рассеяния точечной релятивистской заряженной частицы со спином  $1/2$  и массой  $m \ll M$  на точечной заряженной бесспиновой частице с массой  $M$ :

$$\frac{d\sigma_{em}}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 E_2}{Q^4 E_1} \cos^2 \frac{\theta_2}{2}. \quad (7.45)$$

Это известное выражение для сечения моттовского рассеяния [9]. Под точечной частицей здесь подразумевается такая частица, которая не прояв-

ляет никакой структуры. Так структура лептонов (электронов и мюонов) пока не обнаружена вплоть до расстояний около  $10^{-15}$  см, отвечающих передачам 4-импульса порядка 100 ГэВ<sup>2</sup>. Экспериментально измеренные электромагнитные формфакторы нуклонов (7.44) демонстрируют протяженность электрического заряда и магнитного момента, т.е. неточечность адронов. Точечному протону с дираковским магнитным моментом ( $\mu_p = 1$ ) отвечало бы следующее сечение лептон-протонного упругого рассеяния:

$$\frac{d\sigma_{em}}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 E_2}{Q^4 E_1} \left[ \cos^2 \frac{\theta_2}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \right]. \quad (7.46)$$

Для дальнейшего сопоставления формул (7.45), (7.46) с результатами экспериментального изучения структурных функций нуклона более удобно использовать вместо  $Q^2$  безразмерную переменную  $y = \nu/E_1 = Q^2/2ME_1$ . Соответствующая замена переменных в формулах (7.45), (7.46) приводит к следующему выражению для дифференциального сечения упругого рассеяния точечных частиц со спинами 1/2 и 0:

$$\frac{d\sigma_{em}}{dy} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{sy^2} (1-y). \quad (7.47)$$

Это выражение справедливо, если  $s \gg M^2$ . В случае упругого рассеяния двух точечных частиц со спинами 1/2 при  $s \gg M^2$  получаем

$$\frac{d\sigma_{em}}{dy} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{sy^2} \left( 1 - y + \frac{y^2}{2} \right). \quad (7.48)$$

Отметим, что безразмерная переменная  $y$  связана с углом рассеяния в Ц-системе упругой реакции следующим соотношением:

$$y = (1 - \cos \theta_2^*)/2. \quad (7.49)$$

Приведем здесь выражения для дифференциальных сечений упругого рассеяния нейтрино (антинейтрино) на точечных заряженных фермионах со спином 1/2 за счет взаимодействия слабых заряженных  $V-A$  токов (детали см. в [11]):

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} = \frac{G^2 s}{\pi}, \quad (7.50)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} = \frac{G^2 s}{\pi} (1-y)^2.$$

Формулы (7.50) выписаны для случая высоких энергий  $s \gg M^2, m^2$ . Заметим, что в силу соотношения (7.49) сечения (7.50) отвечают изотропному угловому распределению рассеянных точечных частиц в случае рассеяния нейтрино на заряженном бесструктурном фермионе и распределению вида  $d\sigma_{\bar{\nu}}/d\Omega_2^* \sim (1 + \cos \theta_2^*)^2$  при рассеянии антинейтрино на той же мишени.

В тех же условиях ( $s \gg N^2$ ) дважды дифференциальные сечения неупругих процессов (7.1), (7.2) по переменным  $x$  и  $y$  имеют вид

$$\frac{d^2\sigma_{em}}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{sy^2 x^2} [(1-y)F_2^{em}(x, Q^2) + y^2 x F_1^{em}(x, Q^2)], \quad (7.51)$$

$$\frac{d^2\sigma^{\nu, \bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G^2 s}{2\pi} [(1-y)F_2^{\nu, \bar{\nu}}(x, Q^2) + y^2 x F_1^{\nu, \bar{\nu}}(x, Q^2) \pm xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) F_3^{\nu, \bar{\nu}}(x, Q^2)]. \quad (7.52)$$

В формулах (7.51), (7.52) вместо структурных функций  $W_i(Q^2, \nu)$  введены безразмерные структурные факторы  $F_i(x, Q^2)$ :

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= MW_1(Q^2, \nu), \\ F_2(x, Q^2) &= \nu W_2(Q^2, \nu), \\ F_3(x, Q^2) &= \nu W_3(Q^2, \nu). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Зависимость этих факторов от величины  $Q^2$  при фиксированных значениях переменной  $x$  измеряется на опыте [64, 65].

### 7.3. Скейлинг и кинематика кварк-партоновой модели глубокоупругих лептон-нуклонных взаимодействий

**Скейлинг глубокоупругих лептон-нуклонных процессов.** Экспериментальное исследование поведения структурных факторов нуклонов  $F_i(x, Q^2)$  в глубокоупругой области (7.38) процессов электророжения, мюонорожения (7.1) и нейтринорожения (7.2) адронов показало, что при фиксированных значениях переменной  $x$  они слабо зависят от величины  $Q^2$  (см., например, [64, 65], а также [28, 61]). Однако электромагнитные формфакторы нуклонов в упругом лептон-нуклонном рассеянии быстро убывают при  $Q^2 \rightarrow \infty$ :  $G_{E,M}^p, G_M^n \sim Q^{-4}$  (см. (7.44)). В результате в области глубокой неупругости преобладают процессы множественного образования адронов в реакциях (7.1), (7.2).

Слабая зависимость структурных факторов нуклонов от величин  $Q^2$  позволяет утверждать, что эти безразмерные факторы зависят от переменной Бьеркена  $x$ . Эта гипотеза получила название скейлинга (масштабной инвариантности) глубокоупругих процессов и привела к выводам относительно внутренней структуры нуклонов [11, 28, 55, 61, 62].

Детальное экспериментальное исследование структурных факторов  $F_i(x)$  нуклонов в процессах (7.1) и (7.2) позволило установить, что с точностью около 10–15% они удовлетворяют следующим соотношениям (см. обзоры [64, 65], а также книги [28, 61]):

$$F_2(x) \approx 2xF_1(x) \approx xF_3(x). \quad (7.54)$$

Эти данные опыта позволяют представить дифференциальные сечения

(7.51), (7.52) процессов (7.1), (7.2) в области глубокой неупругости (7.38) в следующей форме [61]:

$$\frac{d^2 \sigma_{em}}{dx dy} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{sy^2 x^2} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) F_2^{em}(x), \quad (7.55)$$

$$\frac{d^2 \sigma_\nu}{dx dy} \approx \frac{G^2 s}{2\pi} F_2^\nu(x), \quad \frac{d^2 \sigma_{\bar{\nu}}}{dx dy} \approx \frac{G^2 s}{2\pi} (1-y)^2 F_2^{\bar{\nu}}(x). \quad (7.56)$$

Сопоставление структурных функций нуклона, измеренных в процессах электромагнитного (7.1) и слабого (7.2) взаимодействий следует проводить, учитывая, что в  $F_{1,2}^{em}(x)$  дает вклад векторный электромагнитный ток адронов, а в  $F_{1,2}^{\nu, \bar{\nu}}(x)$  векторный и аксиальновекторный слабые заряженные адронные токи. Как показывает анализ, выполненный в [61], вклады от векторного и аксиальновекторного слабых заряженных токов в  $F_{1,2}^{\nu, \bar{\nu}}(x)$  почти совпадают, как и в случае слабого четырехфермионного взаимодействия точечных частиц через заряженные токи. Поэтому в формуле (7.56) удобно переопределить факторы  $F_2^{\nu, \bar{\nu}}(x)$ , записав их в виде

$$F_2^{\nu, \bar{\nu}}(x) = 2F_{2V}^{\nu, \bar{\nu}}(x)$$

и, соответственно,

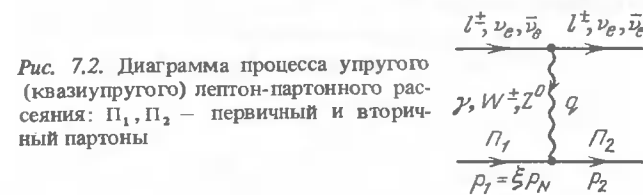
$$\frac{d^2 \sigma_\nu}{dx dy} \approx \frac{G^2 s}{\pi} F_{2V}^\nu(x), \quad \frac{d^2 \sigma_{\bar{\nu}}}{dx dy} \approx \frac{G^2 s}{\pi} (1-y)^2 F_{2V}^{\bar{\nu}}(x). \quad (7.57)$$

**Партонная гипотеза.** Формулы (7.55) и (7.57) следует сравнить с соотношениями для сечений упругих двухчастичных взаимодействий (7.47), (7.48), (7.50). Оказывается, что распределения по переменной  $y$  совпадают (ср. формулы (7.48) и (7.55) и (7.50) и (7.57)). Это обстоятельство послужило основой для выдвижения партонной гипотезы [28, 35]. Суть ее заключается в том, что внутри нуклона существуют точечные частицы — партоны, участвующие в электромагнитных и слабых взаимодействиях. Именно в результате взаимодействия точечных лептонов с точечными партонами и наблюдаются  $y$ -зависимости типа (7.55), (7.57) в процессах (7.1), (7.2) множественного образования адронов в лептон-нуклонных соударениях. Партоны должны взаимодействовать сильно; это взаимодействие удерживает их внутри нуклона. Почему партонная структура нуклона не проявляется в процессах упругого или квазиупругого лептон-нуклонного рассеяния? По-видимому, дело в том, что в упругих процессах внутренняя структура нуклона не претерпевает изменения. Можно сказать, что в упругих (квазиупругих) процессах нуклон воспринимает передаваемые ему импульс и энергию как единое образование. Его составные части — партоны участвуют в процессе взаимодействия когерентно.

В глубоконеупругих процессах (7.1), (7.2) ситуация качественно иная. В области глубокой неупругости энергия и импульс передаются отдельному партону нуклона. При этом нарушаются связи между партонами, что и вызывает разрушение его структуры, проявляющееся в появлении множества вторичных адронов. Партоны не наблюдаются как свободные частицы в конечном состоянии процессов (7.1), (7.2). Это свойство совпадает с

основной характеристикой кварков, которые были придуманы для объяснения спектра наблюдаемых адронов и их классификации (см., например, [66, 67]).

Как известно [66, 67], кварки-фермионы со спинами  $1/2$  обладают дробными электрическими зарядами и участвуют во всех типах взаимодействий. Различают структурные кварки, которые необходимы для описания квантовых чисел мезонов и барионов\*), и токовые кварки, которые являются составными частями релятивистского структурного кварка, участвующими в процессах взаимодействия с другими точечными частицами. Структурный кварк представляют как протяженный объект, по своим размерам существенно (скажем, на порядок) меньший нуклона и



состоящий из точечного кварка с квантовыми числами структурного кварка, окруженного облаком квантов сильного взаимодействия — глюонов и порождаемых глюонами токовых кварк-антикварковых пар.

В системе отсчета, где нуклон (или любой другой адрон) ультрарелятивистский, его структурные кварки представляются, таким образом, в виде долгоживущей когерентной флуктуации почти свободных точечных кварков, антикварков и глюонов, которые и взаимодействуют в глубоко неупругой области с другими точечными частицами (кварками, лептонами). Эти квазисвободные точечные кварки (антикварки) и называются токовыми, так как их волновые функции образуют соответствующие токи в процессах слабого, электромагнитного и сильного взаимодействия. Глюоны — кванты сильного взаимодействия между кварками, электрически нейтральные и не участвуют в электромагнитных и слабых взаимодействиях (детали динамики кварков см. в книгах [11, 28, 55, 61, 62, 66]). Партоны удается отождествить с токовыми кварками (см. ниже), поэтому гипотезу о партонной структуре нуклона называют часто кварк-партонной гипотезой. Глюоны также относят к партонам при исследованиях сильных взаимодействий на основе партонной модели.

**Кинематика лептон-партонного взаимодействия.** Выше была указана тождественность поведения по  $y$ -переменной дифференциальных сечений процессов упругого электромагнитного и слабого взаимодействий двух точечных фермионов со спинами  $1/2$  и процессов глубоконеупругого лептон-нуклонного взаимодействия (7.1), (7.2). Для полной формулировки партонной гипотезы необходимо установить физический смысл другой безразмерной переменной,  $x = Q^2/2M\nu$ , которая составлена из

\*) Мезон составляется из структурных кварка и антикварка требуемых сортов, барион — из трех кварков [66, 67].

отношения независимых кинематических инвариантов  $Q^2 = -t$  и

$$2(qp_N) = 2M\nu.$$

Рассмотрим процесс упругого (квазиупругого) соударения лептона с партоном, диаграмма которого изображена на рис. 7.2. Если осуществляется электромагнитное взаимодействие (обмен фотоном) или слабое взаимодействие через нейтральные токи (обмен  $Z^0$ -бозоном), то сорта лептонов и партонов в начале процесса и в конце совпадают. Если же осуществляется слабое взаимодействие заряженных токов (обмен  $W^\pm$ -бозоном), то электрические заряды лептонов и партонов в конце и начале процесса различны, например:  $\nu_\mu + P_1 \rightarrow \mu^- + P_2$ , где  $e(P_2) = e(P_1) = 1$ ,  $e(P_{1,2})$  — заряды партонов  $P_{1,2}$  в единицах заряда протона,  $e(p) = 1$ . Из закона сохранения энергии и импульса в упругом рассеянии (рис. 7.2) ( $k_1 + p_1 = k_2 + p_2$ ,  $k_{1,2}$  — 4-импульсы начального и конечного лептонов,  $p_{1,2}$  — 4-импульсы начального и конечного партонов) вытекает соотношение

$$q + p_1 = p_2 \quad (7.58)$$

между переданным 4-импульсом  $q$  и 4-импульсами партонов  $p_1, p_2$ .

Выше отмечалось, что понятие о партонах имеет смысл в системе отсчета, где нуклон движется с релятивистской скоростью. Если полная энергия соударения лептона и нуклона в Ц-системе реакций (7.1), (7.2)  $\sqrt{s} \gg M$ , то энергия нуклона  $E_N^* = (s + M^2)/2s \approx \sqrt{s}/2$ . Пусть в этой системе отсчета первичный партон переносит долю импульса нуклона  $\xi = |p_1^*|/|p_N^*|$  и движется в том же направлении, что и нуклон, в состав которого он входит. При условии пренебрежения массами партонов находим компоненты 4-импульса первичного партона в Ц-системе реакций (7.1), (7.2):

$$p_1 = (E_1^*, \xi p_N^*) = (|p_N^*| \sqrt{\xi^2 + \bar{m}_1^2/(p_N^*)^2}, \xi p_N^*) \approx \xi p_N^*, \quad (7.59)$$

где  $\bar{m}_1$  — масса партона. Соотношение  $p_1 = \xi p_N^*$  справедливо, если значения  $\xi > \bar{m}_1/|p_N^*| \approx 2m_1/\sqrt{s}$ . При  $s \rightarrow \infty$  связь  $p_1 \approx \xi p_N^*$  распространяется на всю область значений  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ). Возведем в квадрат левую и правую части равенства (7.58):

$$q^2 + 2(qp_1) + \bar{m}_1^2 = \bar{m}_2^2,$$

$\bar{m}_2$  — масса вторичного партона. В области глубокой неупругости  $|q^2| = -Q^2 \gg M^2$ , а  $\bar{m}_{1,2}^2 \ll M^2$ .

Оценки показывают, что  $\bar{m}_{1,2}^2 \ll M^2$  если в процессе участвуют обычные кварк-партоны  $u, d$ -типа и даже странные  $s$ -кварки [11, 28, 55, 61, 62]. Поэтому массами партонов можно пренебречь. Тогда из (7.58) вытекает соотношение  $2(qp_1) \approx Q^2$ . Подставляя в это равенство 4-импульс начального партона, согласно формуле (7.59) получаем

$$\xi = Q^2/2M\nu. \quad (7.60)$$

Следовательно,  $\xi = x$ , где  $x$  — безразмерная переменная Бьеркена, от которой зависит структурный фактор нуклона  $F_2^{e,m,\nu,\bar{\nu}}(x)$  в случае осуществления скейлинга. Теперь физический смысл переменной  $x$  определялся однозначно — это доля импульса нуклона, переносимая партоном в системе

отсчета, где импульс нуклона  $|p_N| \rightarrow \infty$  (практически достаточно выполнения неравенства  $|p_N| \gg M$ , где  $M$  — масса нуклона).

В тех же условиях ( $s \gg M^2$ ) квадрат полной энергии соударения лептона и партона в Ц-системе упругой (квазиупругой) реакции, изображенной на рис. 7.2,

$$s_x = (k_1 + p_1)^2 \approx 2(k_1 p_1) \approx 2x(p_N k_1)$$

или окончательно

$$s_x = xs. \quad (7.61)$$

Здесь  $s$  — квадрат полной энергии в Ц-системе реакций (7.1), (7.2)\*. В Ц-системе соударения лептон-партон безразмерная переменная  $y$  имеет тот же физический смысл, что и в Ц-системе реакций упругого (квазиупругого) лептон-нуклонного рассеяния:

$$y = 1 - (k_2 p_1)/(k_1 p_1) = (1 - \cos \theta_2^*)/2. \quad (7.62)$$

Здесь  $\theta_2^*$  — угол между импульсами вторичного и первичного лептонов в Ц-системе лептон — партон. При выводе (7.62) использованы кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \nu &= (qp_N)/M, \quad E_1 = (k_1 p_N)/M, \quad p_1 \approx xp_N, \\ q &= k_1 - k_2, \quad (k_1 p_1) \approx s_x/2, \\ (k_2 p_1) &\approx s_x(1 + \cos \theta_2^*)/4, \quad E_1^* \approx E_2^* \approx \omega_1^* \approx \sqrt{s_x}/2. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Здесь  $E_{1,2}^*$ ,  $\omega_1^*$  — энергии первичного и вторичного лептонов и первичного партона в Ц-системе лептон — партон.

После выяснения в рамках партонной гипотезы физического смысла кинематических переменных  $x$  и  $y$  (см. (7.60), (7.62)) и соотношения (7.61) можно интерпретировать формулы (7.55) и (7.57) для сечений процессов (7.1), (7.2) в области глубокой неупругости (7.38). Для этого представим их в следующем виде:

$$\frac{d\sigma_{em}}{dy} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{s_x y^2} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) [x^{-1} F_2^{em}(x)] dx, \quad (7.64)$$

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} \approx \frac{G^2 s_x}{\pi} [x^{-1} F_{2V}^\nu(x)] dx, \quad (7.65)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} \approx \frac{G^2 s_x}{\pi} (1 - y)^2 [x^{-1} F_{2V}^{\bar{\nu}}(x)] dx.$$

Сравнивая (7.64) с (7.48) и (7.65) с (7.50), можно заключить, что факторы  $[x^{-1} F_2^{em}(x)]$  и  $[x^{-1} F_{2V}^{\nu,\bar{\nu}}(x)]$  следует интерпретировать как плотность распределения участвующих в электромагнитном или слабом взаимодействиях с лептоном партонов по доле  $x$  переносимого ими импульса нуклона. Следовательно, в процессах (7.1), (7.2) в области глубокой неупругости (7.38) удастся не только выявить присутствие точечных

\* Все кинематические соотношения этого раздела применимы, конечно, и для реакции (7.3), которая здесь не рассматривается из-за сложности ее динамики [61].

партонов внутри релятивистского нуклона, но и измерить на опыте их импульсное распределение.

**Спин партонов.** Экспериментально наблюдаемая зависимость дифференциальных распределений по переменной  $y$  (7.64), (7.65) согласуется с предсказанием, что спин партона равен  $1/2$ . Значение спина партона, равное нулю, исключается. Этот результат свидетельствует в пользу кварковой природы партонов, участвующих в электромагнитных и слабых взаимодействиях.

**Заряд партонов.** Экспериментально наблюдаемые распределения (7.55), (7.57) можно использовать для проверки гипотезы о дробном электрическом заряде партонов, что позволило бы отождествить их с токовыми кварками. Действительно, формулы (7.55), (7.57) содержат в виде множителя  $[x^{-1}F_2(x)]$  функцию распределения партонов по доле переносимого ими импульса релятивистского нуклона. В процессах, обусловленных слабым взаимодействием (7.2), функции  $[x^{-1}F_2^{\nu, \bar{\nu}}(x)]$  не зависят от электрических зарядов партонов, участвующих в лептон-кварковом рассеянии (рис. 7.2). В случае электромагнитного процесса (7.1) функция  $[x^{-1}F_2^e(x)]$  есть сумма функций распределения заряженных партонов различных сортов, участвующих в элементарном процессе — лептон-кварковом упругом рассеянии — за счет обмена виртуальным фотоном (рис. 7.2). Электрические заряды партонов вносят в упомянутую выше сумму вклад с весом, равным квадрату дробного электрического заряда, свойственного данному сорту партонов. Это различие между факторами  $[x^{-1}F_2(x)]$  в электромагнитных и слабых процессах можно установить экспериментально, поскольку все остальные множители в формулах (7.55), (7.57) или (7.64), (7.65) известны из теории.

Выразим суммарные функции распределения партонов, отождествляя их с кварками. Удобно нормировать функции распределения по  $x - q_i(x)$  кварков сорта  $i$  не на полное число кварков этого сорта в релятивистском нуклоне:

$$n_i = \int_0^1 q_i(x) [x^2 + \bar{m}_i^2/p_N^2]^{-1/2} dx, \quad (7.66)$$

( $\bar{m}_i$  — масса кварка сорта  $i$ ,  $p_N$  — импульс релятивистского нуклона:  $p_N \rightarrow \infty$ ), а на среднее значение доли импульса нуклона, переносимой кварками — партонами данного сорта:

$$\bar{x}_i = \int_0^1 q_i(x) dx. \quad (7.67)$$

В табл. 3 приводятся символы сортов кварков, их квантовые числа: спин  $J$ , изоспин  $T$ , проекция изоспина  $T_3$ , барионный заряд  $B$ , электрический заряд  $e_q$ , странность  $s$ , очарование  $c$ , их эффективные массы  $m_q$  (для токовых кварков). Заряд кварка  $e_q$  измеряется в единицах заряда протона  $e(p)$ . У антикварков  $\bar{q}_i$  все характеристики, кроме спина, изоспина и массы, имеют обратный знак. Распределения кварк-партонов по доле  $x$  импульса нуклона, нормированное условием (7.67), будем обозначать символами кварков:  $u(x)$ ,  $d(x)$  и т.д.

В принятых обозначениях структурная функция протона в электромагнитном процессе (7.1) выражается через распределения кварков и анти-

Таблица 3  
Основные сведения о кварках

| Сорт кварка | $J$   | $T$   | $T_3$  | $B$   | $e_q$  | $s$  | $c$ | $m_q$ [11]           | $\bar{x}_q$ [11]               |
|-------------|-------|-------|--------|-------|--------|------|-----|----------------------|--------------------------------|
| $u$         | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$  | $1/3$ | $2/3$  | $0$  | $0$ | $5 \text{ МэВ}$      | $0,28, \bar{x}_u \approx 0,03$ |
| $d$         | $1/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $1/3$ | $-1/3$ | $0$  | $0$ | $7 \text{ МэВ}$      | $0,15, \bar{x}_d \approx 0,03$ |
| $s$         | $1/2$ | $0$   | $0$    | $1/3$ | $-1/3$ | $-1$ | $0$ | $150 \text{ МэВ}$    | $0,01, \bar{x}_s \approx 0,01$ |
| $c$         | $1/2$ | $0$   | $0$    | $1/3$ | $2/3$  | $0$  | $1$ | $1,4 \text{ ГэВ}$    | —                              |
| $b$         | $1/2$ | $0$   | $0$    | $1/3$ | $-1/3$ | $0$  | $0$ | $\sim 5 \text{ ГэВ}$ | —                              |

кварков в протоне:

$$F_{2p}^{em}(x) = e_u^2[u(x) + \bar{u}(x)] + e_d^2[d(x) + \bar{d}(x)] + e_s^2[s(x) + \bar{s}(x)]. \quad (7.68)$$

Вкладом очарованных и более тяжелых кварк-антикварковых пар в (7.68) пренебрегается. Значения квадратов кварковых зарядов  $e_u^2 = 4/9$ ,  $e_d^2 = e_s^2 = 1/9$ . Протон и нейтрон состоят из трех структурных кварков:  $p = (uud)$ ,  $n = (udd)$  [11, 66, 67]. В кварк-партоновой модели релятивистский нуклон (протон или нейтрон) состоит из тех же трех кварков, определяющих его квантовые числа\*), и некоторого числа кварк-антикварковых пар различных сортов. Кварки (антикварки), входящие в состав релятивистского нуклона, считаются точечными токовыми кварками. Совокупность кварк-антикварковых пар нуклона называют "морем", а соответствующие кварки (антикварки) — "морскими". "Море" кварк-антикварковых пар имеет вакуумные квантовые числа и считается одинаковым в протоне и нейтроне. Структурную функцию нейтрона  $F_{2n}^{em}(x)$  можно выразить через функции распределения  $u(x)$ ,  $d(x)$  и других кварков в протоне, если сделать в (7.68) замены  $u(x) \leftrightarrow d(x)$ ,  $\bar{u}(x) \leftrightarrow \bar{d}(x)$ .

Это правило является следствием изотопической симметрии сильных взаимодействий (см., например, [11]). Таким образом,

$$F_{2n}^{em} = e_u^2[d(x) + \bar{d}(x)] + e_d^2[u(x) + \bar{u}(x)] + e_s^2[s(x) + \bar{s}(x)]. \quad (7.69)$$

Комбинацию структурных факторов протона и нейтрона

$$F_{2N}^{em} = [F_{2p}^{em}(x) + F_{2n}^{em}(x)]/2 = (e_u^2 + e_d^2)[u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + e_s^2[s(x) + \bar{s}(x)] \quad (7.70)$$

называют электромагнитной структурной функцией нуклона.

В случае нейтринных (антинейтринных) процессов (7.2) структурные функции  $F_{2V}^{\nu, \bar{\nu}}(x)$  содержат вклады только от слабых процессов (рис. 7.2), идущих на кварк-партонах, в формулах (7.56), (7.57), (7.65) вкладом от слабых процессов, идущих на антикварк-партонах, пренебрегалось. Эти вклады можно легко восстановить, поскольку соударения нейтрино — кварк и антинейтрино — антикварк, а также антинейтрино — кварк и нейтрино — антикварк приводят к одинаковым сечениям. Уточненные формулы

\*) Эти кварки называют валентными.



(7.57) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_v}{dx dy} &= \frac{G^2 s}{\pi} [F_{2V}^{\nu q}(x) + F_{2V}^{\nu \bar{q}}(x) (1-y)^2], \\ \frac{d^2 \sigma_{\bar{v}}}{dx dy} &= \frac{G^2 s}{\pi} [F_{2V}^{\bar{\nu} q}(x) (1-y)^2 + F_{2V}^{\bar{\nu} \bar{q}}(x)]. \end{aligned} \quad (7.71)$$

В формулах (7.71) дополнительный верхний индекс  $q$  или  $\bar{q}$  указывает тип мишени в процессе, изображенном на рис. 7.2. Структурные функции протона в процессах при превышении энергетического порога образования очарованных кварков выражаются через кварковые (антикварковые) распределения по переменной  $x$  [11]:

$$\begin{aligned} F_{2Vp}^{\nu q}(x) &= d(x) + s(x), & F_{2Vp}^{\nu \bar{q}}(x) &= \bar{u}(x), \\ F_{2Vp}^{\bar{\nu} q}(x) &= u(x), & F_{2Vp}^{\bar{\nu} \bar{q}}(x) &= \bar{d}(x) + \bar{s}(x). \end{aligned} \quad (7.72)$$

Переход к нейтронной мишени осуществляется заменами  $u(x) \leftrightarrow d(x)$ ,  $\bar{u}(x) \leftrightarrow \bar{d}(x)$  в формулах (7.72), как и в случае электромагнитных структурных факторов (7.68), (7.69). Усредняя структурные функции нуклона в слабых взаимодействиях по протонному и нейтронному состояниям, находим

$$\begin{aligned} F_{2VN}^{\nu q}(x) &= \frac{1}{2} [d(x) + u(x)] + s(x), & F_{2VN}^{\nu \bar{q}}(x) &= \frac{1}{2} [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)], \\ F_{2VN}^{\bar{\nu} q}(x) &= \frac{1}{2} [u(x) + d(x)], & F_{2VN}^{\bar{\nu} \bar{q}}(x) &= \frac{1}{2} [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + \bar{s}(x). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Аналогично можно усреднить дифференциальные сечения нейтринных и антинейтринных реакций (7.2) на протонах и нейтронах:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{\nu N}}{dx dy} + \frac{d^2 \sigma_{\bar{\nu} N}}{dx dy} &= \\ &= \frac{G^2 s}{2\pi} \{ [1 + (1-y)^2] [u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + 2[s(x) + \bar{s}(x)] \}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Дифференциальное сечение электромагнитного процесса (7.1) на нуклоне, вычисленное на основе (7.64), (7.70),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_N^{em}}{dx dy} &= \frac{2\pi\alpha^2}{sx^2 y^2} [1 + (1-y)^2] \times \\ &\times \{ (e_u^2 + e_d^2) [u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + e_s^2 [s(x) + \bar{s}(x)] \}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Пренебрегая вкладом от странных кварков и антикварков в (7.74) и (7.75), можно сопоставить экспериментальные данные о процессах (7.1) и (7.2) в области глубокой неупругости и определить величину

$$\left[ \frac{1}{2} (e_u^2 + e_d^2) \right]^{-1} = 3,6. \quad (7.76)$$

Соотношение (7.76) — следствие гипотезы о том, что партоны являются кварками. Экспериментальные данные согласуются с результатом (7.76) с относительной погрешностью (10–15) % и, следовательно, подтверждают кварковую природу партонов.

В табл. 3 в последней колонке приводятся приближенные значения средних долей импульса релятивистского протона, переносимых кварками (антикварками) различных сортов, найденные при обработке результатов многих экспериментов [11]. Из этих данных следует, что около половины импульса нуклона переносится глюонами. Кроме того, из этих данных вытекает, что кварки переносят примерно 44% импульса нуклона, а антикварки всего лишь около 7%. Экспериментально измерены также распределения  $u(x)$ ,  $d(x)$ ,  $\bar{u}(x)$ ,  $\bar{d}(x)$ ,  $s(x) = \bar{s}(x)$  [61, 65, 68].

#### 7.4. Кинематика лептон-партонных соударений в брейтовской системе отсчета

**Система отсчета Брейта.** При исследовании лептон-нуклонных взаимодействий кинематика процесса соударения лептона с одним из кварк-партонов релятивистского нуклона (рис. 7.2) особенно наглядно представляется в так называемой брейтовской (Б) системе отсчета [9].

Эта система отсчета определяется следующим условием. Энергетическая компонента переданного 4-импульса  $q$  в этой системе равна нулю,  $q = (q_0' = 0, \mathbf{q}')$ . Таким образом, в Б-системе от лептонов к партонам передается только импульс. Переменные в Б-системе будем отмечать штрихом над символом. В том, что Б-система отсчета существует, нетрудно убедиться, вспомнив, что 4-импульс  $q$  пространственно подобный,  $q^2 = (-\mathbf{q})^2 < 0$ . Следовательно, Л-система и Б-система связаны между собой релятивистским преобразованием. Найдем направление и модуль скорости, соответствующие этому релятивистскому преобразованию. В Л-системе 4-вектор  $q$  имеет компоненты  $q = (q_0 = \nu, \mathbf{q}) = (\nu, 0, 0, |\mathbf{q}|)$ . Вектор  $q$  в Л-системе направлен по оси  $z$ . Энергетическая компонента 4-вектора  $q$  в Б-системе связана с такой же компонентой  $\nu$  в Л-системе формулой

$$q_0' = (\nu - \mathbf{q}\mathbf{v}) / (1 - v^2)^{1/2} = 0, \quad (7.77)$$

где  $v$  — скорость Л-системы относительно Б-системы. Из (7.77) следует, что модуль вектора  $\mathbf{v}$  равен

$$v = \nu / q_{\parallel} = \nu (\nu^2 - q^2 - q_{\perp}^2)^{-1/2}, \quad (7.78)$$

где  $q_{\parallel}$  — параллельная вектору  $\mathbf{v}$  составляющая вектора  $\mathbf{q}$ ,  $q_{\perp}$  — поперечная составляющая вектора  $\mathbf{q}$ . Из (7.77) следует, что  $q_{\parallel} > 0$ . Релятивистское преобразование для продольной компоненты вектора  $\mathbf{q}'$  имеет вид

$$q_{\parallel}' = (q_{\parallel} - \nu v) / (1 - v^2)^{1/2}. \quad (7.79)$$

Используя (7.78) и (7.79), находим

$$q_{\parallel}' = (q_{\parallel}^2 - \nu^2) / q_{\parallel} (1 - v^2)^{1/2} = (-q^2 - q_{\perp}^2) / q_{\parallel} (1 - v^2)^{1/2}. \quad (7.80)$$

Поперечные составляющие не преобразуются,  $q_{\perp}' = q_{\perp}$ .

Поскольку  $q^2 = -(q'_\parallel)^2 - q_\perp^2$  или  $(q'_\parallel)^2 = -q^2 - q_\perp^2$ , из (7.80) вытекает соотношение

$$q'_\parallel = q_\parallel(1 - v^2)^{1/2}. \quad (7.81)$$

Соотношения (7.80) и (7.81) приводят к связи (7.78) независимо от значения  $q_\perp$ . Поэтому можно направить вектор  $v$  вдоль вектора  $q$ , положив  $q = 0$ :

$$v = vq/q^2. \quad (7.82)$$

Поскольку  $|v| = v = v/[v^2 - q^2]^{1/2} = v[v^2 + Q^2]^{-1/2}$ , то скорость  $v < 1$  ( $Q^2 > 0$ ).

Кинематика поглощения виртуального фотона ( $W$ -бозона) партоном в Б-системе. В процессе поглощения виртуального фотона ( $W^\pm$ -бозона) партоном (рис. 7.2) реализуется закон сохранения энергии и импульса  $q + p_1 = p_2$ . Если массы партонов  $\bar{m}_1, \bar{m}_2$  совпадают или они малы по сравнению с  $Q^2$ , то из закона сохранения энергии в Б-системе

$$E'_1 = E'_2, \quad [(p'_1)^2 + \bar{m}_1^2]^{1/2} = [(p'_2)^2 + \bar{m}_2^2]^{1/2} \quad (7.83)$$

вытекает равенство по модулю импульсов первичного и вторичного партонов,  $|p'_1| = |p'_2|$ . Из законов сохранения продольных и поперечных компонент импульсов следует

$$p'_{2\parallel} = |q'|/2, \quad p'_{1\parallel} = -|q'|/2, \quad p'_{1\perp} = p'_{2\perp}, \quad |q'| = \sqrt{Q^2}. \quad (7.84)$$

В Б-системе нуклон-мишень, покоившаяся в Л-системе, обладает энергией и импульсом:

$$E'_N = M[v^2 + Q^2]^{1/2}(Q^2)^{-1/2}, \quad p'_N = -Mvq(v^2 + Q^2)^{1/2}(Q^2)^{-1/2}, \quad (7.85)$$

и движется против направления вектора  $q$  (или  $q'$ ). В области глубокой неупругости

$$E'_N \approx |p'_N| \approx \sqrt{Q^2}/2x \gg M \quad (7.86)$$

и, следовательно, представление о партонной структуре релятивистского нуклона можно использовать и в Б-системе. Полагая, что поперечный импульс первичного партона пренебрежимо мал по модулю сравнительно с продольным, из (7.84) находим в Б-системе

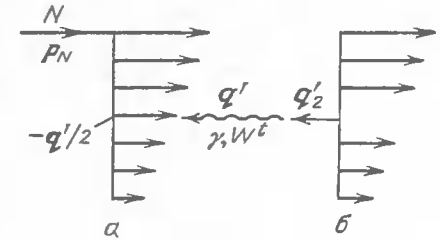
$$p'_1 = -q'/2, \quad p'_2 = q'/2.$$

Переменная  $x = |p'_1|/|p'_N|$ , как следует из (7.85) и (7.86), имеет тот же физический смысл, что и в Ц-системе реакций (7.1), (7.2). Итак, в Б-системе кинематика поглощения партоном виртуального фотона ( $W^\pm$ -бозона) с импульсом  $q'$  выглядит следующим образом: первичный партон с импульсом  $p'_1 = -q'/2$  движется навстречу виртуальной частице, а вторичный партон после поглощения виртуальной частицы движется в направлении вектора  $q'$  с импульсом  $p'_2 = q'/2$  (рис. 7.3).

Можно представить себе, что ультрарелятивистский в Б-системе нуклон состоит из партонов, импульсы которых соответствуют мультипериферической "гребенке" (см. раздел 5.4). Тогда кинематика поглощения виртуального фотона ( $W^\pm$ -бозона) одним из партонов мультипериферической "гребенки" нуклона представляется наглядно на рис. 7.3. После поглощения виртуальной частицы (рис. 7.3, б) соответствующий партон приобре-

тает импульс в направлении, противоположном импульсам партонов-спектаторов ("наблюдателей"), не участвовавших во взаимодействии. Вторичная партонная "гребенка" нуклона уже не представляет нуклон; один из партонов выпал из когерентного набора, составляющего нуклон. Восстановление первичной "гребенки" маловероятно, поэтому вторичная партонная флуктуация с вероятностью, близкой к единице, превращается в две адронные струи. Одна из этих струй порождается за счет взаимодействий партонов-спектаторов, а другая — за счет вторичного провзаимодействовавшего кварк-партона. Это взаимодействие осуществляется глюонами, порождающими кварк-антикварковые пары, компоненты которых,

Рис. 7.3. Схема поглощения виртуального фотона ( $W^\pm$ -бозона) партоном из партонной флуктуации нуклона  $N$ : а — начальное состояние, б — конечное состояние



взаимодействуя друг с другом, образуют ливень вторичных адронов. Адроны спектаторной струи условно относят к фрагментам нуклона-мишени.

Области фрагментации мишени и тока в процессе нейтринорождения тяжелых кварков. В процессах нейтринорождения адронов возможны реакции образования очарованных мезонов и барионов [11]:

$$W^+ + d = c, \quad W^+ + s \rightarrow c, \quad W^- + \bar{d} \rightarrow \bar{c}, \quad W^- + \bar{s} \rightarrow \bar{c}.$$

Символы  $d, s, c$  ( $\bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$ ) — сорта кварков (см. табл. 3). Переходы с участием промежуточного  $W^\pm$ -бозона осуществляются в  $\nu N$ -соударениях, с участием  $W^-$ -бозона — в  $\bar{\nu} N$ -соударениях. Эффективная масса  $c$ -кварка сравнительно велика и при кинематических расчетах не всегда следует пренебрегать этим обстоятельством (масса  $c$ -кварка  $m_c \approx 1,4-1,5$  ГэВ, см. [11, 61] и табл. 3).

Рассмотрим кинематику образования  $c$ -кварка в Б-системе реакций (7.2) или процессов  $\nu_\mu + d(s) \rightarrow \mu^- + c$ ,  $\bar{\nu}_\mu + \bar{d}(\bar{s}) \rightarrow \mu^+ + \bar{c}$  [21, 69]. В этой системе отсчета законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$E'_1 = E'_c, \quad [(p'_1)^2 + m_1^2]^{1/2} = [(p'_c)^2 + m_c^2]^{1/2}, \quad (7.87)$$

$$q' + p'_1 = p'_c.$$

Здесь  $E'_1, p'_1$  — энергия и импульс первичного кварка  $d(\bar{d})$  или  $s(\bar{s})$  в Б-системе;  $E'_c, p'_c$  — энергия и импульс очарованного  $c$ -кварка в Б-системе. Массой  $m_1$  легкого  $d(s)$ -кварка будем пренебрегать. Напомним, что в Б-системе импульс нуклона-мишени  $p'_N$  всегда направлен против направления вектора  $q$  (см. (7.85)), и следовательно, против направления вектора  $q'$  (см. (7.80) при  $q_\perp = 0$ ). Следовательно, импульс первичного партона  $p'_1$  направлен против вектора  $q'$ , так как по предположению все партоны первичного нуклона движутся в одном направлении (во всяком случае, это верно для "жестких" партонов, у которых  $|p'_1| \gg M$  [28, 61]).

Используя формулу (7.87), находим выражение для импульса первичного партона

$$p'_1 = -[(p'_c)^2 + m_c^2]^{1/2}. \quad (7.88)$$

Подставляя (7.88) в формулу для закона сохранения импульса, получаем уравнение относительно величины  $p'_c$ :

$$q' - p'_c = [(p'_c)^2 + m_c^2]^{1/2}, \quad p'_c = (Q^2 - m_c^2)/2\sqrt{Q^2}. \quad (7.89)$$

При  $Q^2 > m_c^2$  кварк вылетает в сторону, противоположную направлению импульсов партонов-спектаторов партоновой "ребенки" нуклона. Этот случай отвечает типичной кинематической картине образования легких кварк-партонов в конечном состоянии. Согласно принятой терминологии такой  $c$ -кварк образуется в области фрагментации слабого тока и, вероятнее всего, образует в конечном состоянии адронную струю, содержащую очарованный мезон [21, 69]. В случае  $Q^2 < m_c^2$  — кварк вылетает в ту же сторону, что и партоны-спектаторы, не участвующие в слабом взаимодействии. При этом в Б-системе будет наблюдаться только одна адронная струя, содержащая очарованный адрон. В таком случае весьма вероятно образование очарованного бариона при переходе  $W^+ + d \rightarrow c$ , если  $d$ -кварк был валентным и определял квантовые числа нуклона.

На основе (7.89) и (7.88) вычисляем модуль импульса первичного кварка в Б-системе:

$$|p'_1| = (Q^2 + m_c^2)/2\sqrt{Q^2}. \quad (7.90)$$

Такое значение импульса  $|p'_1|$  отвечает доле импульса первичного нуклона, приходящейся на первичный кварк, участвующий в слабом взаимодействии:

$$x' = |p'_1|/|p'_N| = x + m_c^2/2M\nu. \quad (7.91)$$

Здесь  $x = Q^2/2M\nu$  — стандартное определение доли импульса нуклона, приходящейся на взаимодействующий кварк. Результат (7.91) показывает, что в тех случаях, когда легкий кварк переходит в тяжелый, он должен обладать дополнительной кинетической энергией.

В связи с этим эффектом следует указать, что при изучении образования тяжелых адронов в процессах лептон-нуклонных взаимодействий в рамках кварк-партоновой модели необходимо учитывать, что функция распределения взаимодействующего кварка по доле переносимого им импульса нуклона — функция переменной  $x'$  (7.91), а не бьеркеновской переменной  $x$  [21, 69]. Отметим, что появление переменной  $x'$  в формулах для процессов нейтрино рождения тяжелых адронов ведет к нарушению скейлинга по переменной  $x$ , не связанному с квантово-хромодинамическими эффектами [55, 61]. Это нарушение скейлинга имеет кинематическое происхождение. Оно обязано пороговому характеру процесса перехода легкого кварка в тяжелый. Скейлинг в таких случаях восстанавливается по мере роста первичной энергии и, следовательно, энергии  $\nu$ , передаваемой вторичным адронам.

Проведенный анализ позволяет релятивистски инвариантно сформулировать критерий образования очарованных адронов в области фрагментации слабого тока [21, 69]. Этот критерий представляется

неравенством

$$(qp_c) < 0, \quad (7.92)$$

где  $p_c$  — 4-импульс очарованного адрона. В Б-системе условие (7.92) означает, что очарованный адрон должен вылетать в переднюю полусферу по отношению к направлению переданного импульса в этой же системе. Условие (7.92) более универсально, чем принятый в научной литературе критерий

$$E_c/\nu \geq 0,1-0,2,$$

где  $E_c$  — энергия очарованного адрона в Л-системе.

### 7.5. Кинематика процессов образования лептонных пар и промежуточных бозонов в кварк-партоновой модели адрон-нуклонных соударений

**Аннигиляция кварка и антикварка в лептонную пару.** В этом разделе представлено теоретическое описание образования пар лептон — антилептон в адрон-нуклонных соударениях ( $l^\pm = e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$ ):

$$h + N \rightarrow l^+ + l^- + X. \quad (7.93)$$

Процесс (7.93) более сложен, чем глубоконеупругие реакции (7.1)–(7.3). В рамках кварк-партонового подхода был предложен следующий механизм его реализации (рис. 7.4). Кварк  $q$  одного из сталкивающихся адронов аннигилирует с антикварком  $\bar{q}$  другого адрона, превращаясь в виртуальный фотон " $\gamma$ ", который затем переходит в пару лептон — антилептон:

$$q + \bar{q} \rightarrow \gamma \rightarrow l^+ + l^-. \quad (7.94)$$

Механизм образования  $l^+l^-$  пар в адронных соударениях (7.94) называется механизмом Дрелла — Яна [70].

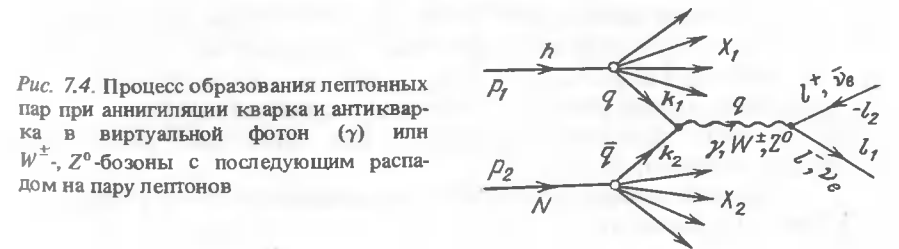


Рис. 7.4. Процесс образования лептонных пар при аннигиляции кварка и антикварка в виртуальный фотон ( $\gamma$ ) или  $W^\pm, Z^0$ -бозоны с последующим распадом на пару лептонов

С точки зрения кинематики процесс (7.94) исключительно прост. Его динамика известна и определяется в рамках квантовой электродинамики [9]. Если известны из других экспериментов функции распределения по импульсам кварков и антикварков — партонов в адронах, то нетрудно вычислить дифференциальное сечение реакции образования лептонной пары

(7.93) [55, 61, 68, 70]:

$$d\sigma = \frac{1}{3} \sum_i \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} [q_i^h(x_1) q_i^N(x_2) + q_i^h(x_2) q_i^N(x_1)] \times \\ \times \sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+ l^-) \delta(s_{12} - q^2) dq^2. \quad (7.95)$$

Здесь  $q^2 = (l_1 + l_2)^2$  — квадрат эффективной массы лептонной пары, которую часто называют дилептоном,  $l_{1,2}$  — 4-импульсы лептонов,  $s_{12} = (k_1 + k_2)^2$  — квадрат эффективной массы аннигилирующих кварка  $q$  и антикварка  $\bar{q}$ ,  $k_{1,2}$  — 4-импульсы кварка и антикварка;  $x_{1,2}$  — доля продольного импульса адрона (нуклона), переносимая кварком (антикварком),  $q_{i,\bar{i}}^h(x)$  — функция распределения кварков (антикварков) сорта  $i(\bar{i})$  в адроне  $h$  по доле переносимого ими продольного импульса  $x$ ,  $q_{i,\bar{i}}^N(x)$  — функция распределения кварков (антикварков) сорта  $i(\bar{i})$  в нуклоне  $N$  по доле переносимого ими продольного импульса  $x$ ,  $\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+ l^-)$  — полное сечение аннигиляции кварка и антикварка в пару  $l^+ l^-$  с эффективной массой  $\sqrt{q^2}$  [9]:

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+ l^-) = 4\pi\alpha^2 e_l^2 / 3q^2, \quad (7.96)$$

где  $\alpha = 1/137$ ,  $e_l$  — заряд аннигилирующего кварка. Сумма по  $i$  в (7.95) вычисляется по всем сортам пар  $q\bar{q}$ , которые аннигилируют в пару  $l^+ l^-$ . Два слагаемых в квадратных скобках в выражении (7.95) учитывают, что кварк  $q$  (антикварк  $\bar{q}$ ) может принадлежать как адрону  $h$ , так и нуклону  $N$ .

Формула (7.95) выведена в предположении, что импульсы кварков (антикварков)-партонов направлены вдоль импульсов релятивистских адронов, к которым они принадлежат. Это означает, что поперечные импульсы партонов пренебрежимо малы по сравнению с продольными [55, 61, 68, 70]. В таком приближении дилептон, характеризующийся 4-импульсом  $q$ , вылетает в Ц-системе реакции (7.93) в направлении, параллельном оси соударения первичных адронов. В этом приближении формула (7.95) не описывает распределение дилептонов по поперечным импульсам  $q_{\perp}$ ; она используется для предсказаний распределений дилептонов по эффективным массам и быстротам (см. ниже). При высоких энергиях  $\sqrt{s} \gg M$  оба первичных адрона являются релятивистскими в Ц-системе реакции (7.93). Поэтому партонный механизм (7.94) правомерно рассмотреть именно в Ц-системе процесса (7.93).

В этой системе уравнения законов сохранения энергии и импульса в процессе (7.93) имеют вид

$$\omega_1 + \omega_2 = q_0, \quad k_1 + k_2 = q, \quad (7.97)$$

где  $\omega_{1,2} = x_{1,2} \sqrt{s}/2$  — энергии сталкивающихся кварка и антикварка (энергии адрона  $h$  и нуклона  $N$  в Ц-системе примерно совпадают и равны  $\sqrt{s}/2$ ,  $m_h$  — масса адрона  $h$ ),  $q_0$  — энергия дилептона, импульсы кварка ( $k_1$ ) антикварка ( $k_2$ ) и дилептона ( $q$ ) направлены параллельно импульсу адрона ( $p_h$ ). Продольные компоненты векторов  $k_1$  и  $k_2$  отличаются знаком, поэтому уравнение закона сохранения импульса (7.97) представляется

в следующем виде:

$$x_1 p_h - x_2 p_N = q_z, \quad (7.98)$$

где  $q_z$  — продольный импульс дилептона. Соотношения (7.97) и (7.98) можно представить в виде системы уравнений

$$x_1 + x_2 = 2q_0/\sqrt{s}, \quad x_1 - x_2 = 2q_z/\sqrt{s}. \quad (7.99)$$

Из (7.99) вытекают соотношения

$$x_1 = (q_0 + q_z)/\sqrt{s}, \quad x_2 = (q_0 - q_z)/\sqrt{s}. \quad (7.100)$$

Перемножая левые и правые части равенств (7.100) друг на друга, получаем

$$x_1 x_2 s = q_0^2 - q_z^2 = q^2. \quad (7.101)$$

Величина  $x_1 x_2 s$  есть квадрат эффективной массы аннигилирующих кварков  $s_{12} = (k_1 + k_2)^2$ :

$$s_{12} \approx 2(k_1 k_2) = 2\omega_1 \omega_2 - 2k_1 k_2 \approx s x_1 x_2.$$

Поэтому аргумент  $\delta$ -функции в формуле (7.95) можно представить в виде

$$s_{12} - q^2 = x_1 x_2 s - q^2. \quad (7.102)$$

От переменной  $x$  можно перейти к переменной быстроты  $y$  дилептона, используя вытекающие из (7.100) соотношения:

$$y = \ln x_1 + (1/2) \ln(s/q^2). \quad (7.103)$$

Тогда формула (7.95) представляет дважды дифференциальное сечение образования дилептона с быстротой  $y$  и эффективной массой  $\sqrt{q^2}$ :

$$\frac{d^2 \sigma}{dy dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{9q^4} \sum_i e_i^2 [q_i^h(x_1) q_i^N(x_2) + q_i^h(x_2) q_i^N(x_1)], \quad (7.104)$$

где, согласно (7.103),

$$x_{1,2} = \sqrt{q^2/s} \exp(\pm y). \quad (7.105)$$

Пределы изменения переменной быстроты дилептона при фиксированном значении его массы представляются неравенствами

$$-\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - q^2}}{\sqrt{s} - \sqrt{s - q^2}} \leq y \leq \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - q^2}}{\sqrt{s} - \sqrt{s - q^2}}. \quad (7.106)$$

Границы (7.106) вытекают из соотношений

$$y = (1/2) \ln [(q_0 + q_z)/(q_0 - q_z)], \quad q_z = \pm [q_0^2 - q^2]^{1/2},$$

$$q_0 = (x_1 + x_2) \sqrt{s}/2 \leq \sqrt{s}, \quad x_{1,2} \leq 1.$$

В пренебрежении массами адронов и лептонов эффективная масса дилептона изменяется в интервале

$$M_0 \leq \sqrt{q^2} \leq \sqrt{s}, \quad (7.107)$$

где  $M_0$  — минимальное значение массы дилептона, при котором можно применять кварк-партонную модель.

Вместо переменной быстроты дилептона иногда используют безразмерную переменную

$$x_F = x_1 - x_2 = 2q_z/\sqrt{s} = 2(\sqrt{q^2}/\sqrt{s}) \operatorname{sh} y. \quad (7.108)$$

Эта переменная аналогична фейнмановской переменной, используемой для описания скейлинга спектра инклюзивных адронов. Аргументы функций распределения кварков (антикварков)  $x_1$  и  $x_2$  выражаются через  $x_F$ :

$$x_{1,2} = [(x_F^2 + 4\tau)^{1/2} \pm x_F]/2, \quad (7.109)$$

где  $\tau = q^2/s$ . Переход от переменной  $y$  к переменной  $x_F$  осуществляется с помощью соотношения  $dy = dx_F (x_F^2 + 4\tau^2)^{-1/2}$ . Пределы изменения

$$-(1-\tau) \leq x_F \leq (1-\tau). \quad (7.110)$$

Изучение процесса (7.93) является проверкой предсказаний кварк-партоновой модели и квантовой хромодинамики (см., например, [71]).

Кварк-партоновая модель процесса (7.93) предсказывает следующее. 1. Зависимость выходов дилептона от сорта адрона  $h$  является сильной. Поскольку "морских" антикварков в адронах сравнительно мало (табл. 3), то сечение образования пар лептонов с большой эффективной массой в  $NN$ -соударении мало по сравнению с сечениями  $\pi^+N$ ,  $K^-N$  и  $\bar{N}N$ -соударений. 2. Дифференциальное распределение дилептонов по эффективной массе  $q^2$  должно проявлять характерное для скейлинга поведение по безразмерной переменной  $\tau$ :

$$q^4 d^2\sigma/dq^2 dy = f(y, \tau), \quad (7.111)$$

где  $f(y, \tau)$  — универсальная безразмерная функция переменных  $y$  и  $\tau$  для данного типа первичных адронов  $h$  и  $N$  (см. (7.104)). Свойство скейлинга по переменной  $\tau$  выполняется на опыте при энергиях  $\sqrt{s} \approx 20 - 60$  ГэВ с погрешностью, не хуже 20% (см. [61], где можно найти также детальное обсуждение других предсказаний).

Кварк-партоновая модель в своей простейшей форме (7.95) не предсказывает характера распределения дилептонов по поперечным импульсам  $q_{\perp}$ . Распределение дилептонов по  $q_{\perp}$  можно измерить экспериментально и, следовательно, получить информацию о поперечном движении кварк-партонов в релятивистском адроне. В таком подходе процесс (7.93) обладает ценным преимуществом перед чисто адронными процессами: на распределение дилептонов по  $q_{\perp}$  влияет только взаимодействие между кварк-партонами сталкивающихся адронов, в то время как на распределение вторичных инклюзивных адронов по поперечным импульсам влияет и взаимодействие кварк-партонов в конечном состоянии. Теоретические предсказания распределений дилептонов по  $q_{\perp}$  относятся к динамике сильных взаимодействий кварков и глюонов [71], которая предсказывает практически линейный рост среднего поперечного импульса дилептона в зависимости от его эффективной массы. Это предсказание относится к кинематической области сравнительно больших значений  $q_{\perp}$ :  $M_0^2 \leq q_{\perp}^2 \leq q^2$ , где  $M_0 \approx 1$  ГэВ. При  $q_{\perp} \leq 1$  ГэВ может оказаться существенным исходное поперечное движение кварков внутри адрона, связанное с ограниченностью его поперечных размеров. Учет этого поперечного движения обычно производится на феноменологических основах (см. ниже).

У читателя может сложиться впечатление, что в данном разделе слишком много внимания уделяется динамике кварк-партоновой модели. Однако

эта динамика тесно переплетается с кинематикой элементарного процесса (7.94).

Образование  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозонов в кварк-партоновой модели. Процессы образования  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозонов в адрон-нуклонных соударениях также можно исследовать в рамках механизма Дрелла-Яна (см., например, [14, 15, 16]). Если образовавшийся  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозон распадается на лептонную пару:

$$W^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e), \quad \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}), \quad (7.112)$$

$$Z^0 \rightarrow e^+ + e^-, \quad \mu^+ + \mu^-,$$

то между процессом (7.93) и процессами

$$h + N \rightarrow (W^{\pm}, Z^0) + X \quad (7.113)$$

имеется кинематическая аналогия. Формула Дрелла-Яна (7.95) претерпевает при этом следующие изменения: 1) суммирование по сортам кварков в ней ведется в случае образования  $Z^0$ -бозона также, как в случае (7.93) с промежуточным (виртуальным) фотоном " $\gamma$ " (см. (7.94));  $W^{\pm}$ -бозоны образуются за счет процессов аннигиляции кварка и антикварка разных сортов, например:

$$u + \bar{d}(\bar{s}) \rightarrow W^+, \quad d(s) + \bar{u} \rightarrow W^-,$$

поэтому суммирование следует проводить по всем подходящим по квантовым числам парам кварк-антикварк; 2) масса  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона в области энергий выше порога его образования считается либо фиксированной ( $q^2 = m_{W,Z}^2$ ), либо спектр масс описывается релятивистской формулой Брейта-Вигнера. Последнее более оправдано, поскольку ширина  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона довольно велика,  $\Gamma \approx 2,2$  ГэВ [11]. Поэтому в формуле (7.95) сечение  $\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-)$  следует заменить на выражение [11]

$$\sigma_{12} = (1/3) 4\pi(2S+1) \Gamma_q \Gamma_l [(s_{12} - m_{W,Z}^2)^2 + \Gamma^2 m_{W,Z}^2]^{-1}, \quad (7.114)$$

где  $S = 1$  — спин  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона,  $\Gamma_q$  — парциальная ширина распада  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона на соответствующую пару кварк-антикварк,  $\Gamma_l$  — парциальная ширина распада  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона по одному из лептонных каналов (7.112). В пределе бесконечно малой ширины распада ( $\Gamma/m_{W,Z} \rightarrow 0$ ) формула (7.114) упрощается:

$$\sigma(s_{12}) = [4\pi^2(2S+1) \Gamma_q \Gamma_l / 3m_{W,Z} \Gamma] \delta(s_{12} - m_{W,Z}^2). \quad (7.115)$$

С помощью (7.115) удобно оценить сечение образования  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$  в процессе (7.113) с последующим распадом по одному из каналов типа (7.112) [11].

Равенство  $q^2 = m_{W,Z}^2$  видоизменяет кинематические соотношения (7.115) (см. (7.101), (7.103), (7.105), (7.106), (7.108)):

$$sx_1x_2 = m_{W,Z}^2, \quad y = \ln x_1 + (1/2) \ln(s/m_{W,Z}^2),$$

$$x_1 = m_{W,Z} e^y/\sqrt{s}, \quad x_2 = m_{W,Z} e^{-y}/\sqrt{s},$$

$$-\ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - m_{W,Z}^2}}{m_{W,Z}} \leq y \leq \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - m_{W,Z}^2}}{m_{W,Z}},$$

$$x_F = 2m_{W,Z} \operatorname{sh} y/\sqrt{s}, \quad \tau = m_{W,Z}^2/s.$$

Здесь  $y$  — быстрота  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ -бозона в Ц-системе реакции (7.113).

В пренебрежении поперечным движением кварка и антикварка  $W^\pm, Z^0$ -бозон имеет импульс  $q$ , направленный параллельно направлению импульса  $p_h$  адрона  $h$  в Ц-системе. В этих условиях распределение по поперечным импульсам  $k_\perp$  лептонов  $l^\pm$  продуктов распада  $W^\pm$  по каналам (7.112) характеризуется корневой особенностью в точке  $k_\perp = m_W/2$  (см. раздел 2.5 формулу (2.93)). В реальной ситуации следует дополнительно учесть конечную ширину  $W^\pm$ -бозона (см. (7.114)), что приведет к "размыванию" корневой особенности и проявлению ее в виде максимума распределения вторичных лептонов  $l^\pm$  по  $k_\perp$  вблизи значения  $k_\perp \approx m_W/2$ . Еще больший эффект "размывания" особенности (2.93) ожидается вследствие поперечного движения кварка и антикварка аннигилирующих в  $W^\pm$ -бозон. Соответствующие феноменологические расчеты [14] показывают, что учет поперечного движения кварков практически не изменяет положения максимума распределения наблюдаемых лептонов по  $k_\perp$ . В случае лептонного распада  $Z^0$ -бозона можно наблюдать оба заряженных лептона, что позволяет детектировать  $Z^0$ -бозон по брейт-вигнеровскому пику в распределении лептонной пары  $l^+l^-$  по ее эффективной массе.

Феноменологический учет поперечного движения кварк-партонов в процессах типа Дрелла-Яна [72]. Ниже оценивается распределение кварк-партонов по поперечным импульсам в рамках следующего феноменологического подхода. 1. Предполагается, что плотность импульсного распределения кварк (антикварк)-партонов представляется в виде

$$q(x_\pm, k_\perp) = q(x_\pm) f(k_\perp), \quad (7.116)$$

где  $x_\pm = (\omega \pm k_Z)/2E$ ,  $E$  — энергия адрона, содержащего кварк с энергией  $\omega$ , продольным импульсом  $k_Z$  и поперечным импульсом  $k_\perp$ . Массой кварк-партона пренебрегается. Адрон полагается ультрарелятивистским. 2. Распределение кварков (антикварков) по поперечным импульсам выбирается в гауссовой форме:

$$f(k_\perp) = (b/\pi) \exp(-bk_\perp^2), \quad \int d^2k_\perp f(k_\perp) = 1. \quad (7.117)$$

Нормировочный интеграл по компонентам вектора  $k_\perp$  вычисляется в бесконечных пределах.

Рассмотрим далее интеграл вида

$$I = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\omega_1 \omega_2} q(x_{1+}) \bar{q}(x_{2-}) f(k_{1\perp}) f(k_{2\perp}) \delta^{(4)}(q - k_1 - k_2), \quad (7.118)$$

где индексами 1, 2 отмечены кинематические характеристики кварка и антикварка, принадлежащих разным адронам. Партон, помеченный индексом 1, имеет положительную продольную компоненту импульса ( $k_{1Z} > 0$ ), а индексом 2 — отрицательную ( $k_{2Z} < 0$ ) в Ц-системе адронной реакции. Использование в распределениях кварков (7.116) переменных  $x_\pm$  позволяет придать интегралу (7.118) ковариантный характер. Интегралы типа (7.118), фигурируют в формулах для дифференциальных сечений процессов Дрелла-Яна, механизм которых заключается в слиянии кварка и антикварка, принадлежащих различным сталкивающимся адронам, в частицу с 4-импульсом  $q$  [72]. Вследствие ковариантности интеграла (7.118) интегрирование по компонентам импульсов кварка и антикварка можно

провести в системе отсчета, где их суммарный продольный импульс  $q_Z = 0$ . В этой системе отсчета условие  $k_{1Z} > 0$  приводит к неравенству  $k_{2Z} < 0$ . В выбранной системе отсчета

$$x_{1+} = (\omega_1 + k_{1Z})/2E_1, \quad x_{2+} = (\omega_2 - k_{2Z})/2E_2, \\ q_0 = (q^2 + q_\perp^2)^{1/2} = M_\perp. \quad (7.119)$$

Проведем в (7.118) интегрирование по всем компонентам вектора  $k_2$ :

$$I = \int \frac{d^3k_1}{\omega_1 \omega_2} q(x_{1+}) \bar{q}(x_{2-}) f(|k_{1\perp}|) f(|q_\perp - k_{1\perp}|) \delta(M_1 - \omega_1 - \omega_2), \\ \omega_2 = (q_\perp^2 - 2(q_\perp k_{1\perp}) + \omega_1^2)^{1/2} = (q_\perp^2 + \omega_1^2 - 2q_\perp k_{1\perp} \cos \varphi)^{1/2}. \quad (7.120)$$

Элемент объема в импульсном пространстве можно представить в форме ( $k_{1Z} = (\omega^2 - k_{1\perp}^2)^{1/2} > 0$ )

$$d^3k_1 = \omega_1 [2(\omega_1^2 - k_{1\perp}^2)^{1/2}]^{-1} d\omega_1 dk_{1\perp}^2 d\varphi \quad (7.121)$$

и выполнить в (7.120) интегрирование по азимутальному углу с помощью  $\delta$ -функции. В результате получаем

$$I = \frac{1}{q_\perp} \int d\omega_1 \int dk_{1\perp}^2 \frac{q(x_{1+}) \bar{q}(x_{1-})}{[(\omega_1^2 - k_{1\perp}^2)(k_{1\perp}^2 - k_0^2)]^{1/2}} \times \\ \times f(k_{1\perp}) f([k_{2\perp}^2 + M_1^2 - 2M_1 \omega_1]^{1/2}), \quad (7.122) \\ k_0^2 = (2M_1 \omega_1 - q^2)^2 / 4q_\perp^2.$$

Пределы интегрирования по  $k_{1\perp}^2$  определяются неравенствами

$$k_0^2 \leq k_{1\perp}^2 \leq \omega_1^2.$$

Левое из неравенств следует также из требования  $|\cos \varphi| \leq 1$ . Значения  $k_{2\perp}^2 = k_{1\perp}^2 + M_1^2 - 2M_1 \omega_1$  и  $\omega_2 = M_1 - \omega_1$  — следствия законов сохранения.

Чтобы выяснить пределы изменения энергии  $\omega_1$ , кроме выполнения неравенства  $k_0^2 \leq \omega_1^2$ , из которого вытекают следующие ограничения:

$$(M_1 - q_\perp)/2 \leq \omega_1 \leq (M_1 + q_\perp)/2, \quad (7.123)$$

необходимо также потребовать выполнения условия  $\omega_1 \leq E_1$ , где  $E_1$  — энергия адрона в системе отсчета, в которой  $q_Z = 0$ . Скорость  $v$  этой системы относительно Ц-системы определяется из формулы релятивистского преобразования продольной компоненты импульса  $q$ :

$$q_Z = (q_Z^* - v q_0^*)/\sqrt{1 - v^2} = 0, \quad v = q_Z^*/q_0^*. \quad (7.124)$$

Здесь звездочкой помечены кинематические характеристики в Ц-системе реакции адрон-нуклонного соударения.

Используя соотношение (7.124), находим  $E_1$  и  $E_2$  в системе отсчета, где  $q_Z = 0$ :

$$E_1 = (E_1^* - v p_1^*)(1 - v^2)^{-1/2} \approx M_1/(x_E + x), \quad (7.125)$$

$$E_2 = (E_2^* + v p_2^*)(1 - v^2)^{-1/2} \approx M_1/(x_E - x), \quad (7.126)$$

$$x_E = 2q_0^*/\sqrt{s}, \quad x = 2q_Z^*/\sqrt{s}.$$



Формулы (7.125) получены в приближении  $E_1^* \approx p_1^*$ ,  $E_2^* \approx p_2^*$ ,  $E_1^* \approx E_2^* \approx \sqrt{s}/2$ . Нетрудно проверить, что значение  $E_1$  всегда превышает нижний предел изменения  $\omega_1$  в (7.123). Однако верхний предел в (7.123) может превышать значение  $E_1$ , что недопустимо. Поэтому пределы изменения  $\omega_1$  представляются в следующем виде:

$$(M_1 - q_1)/2 \leq \omega_1 \leq \min[E_1, (M_1 + q_1)/2]. \quad (7.127)$$

Под знаком интеграла (7.121) находится быстро убывающая с ростом  $k_{1\perp}^2$  функция

$$f(k_{1\perp}) f([k_{1\perp}^2 + M_1^2 - 2M_1 \omega_1]^{1/2}) = \exp[-2bk_{1\perp}^2 - bM_1(M_1 - 2\omega_1)].$$

Поэтому вклад в интеграл (7.121) от области значений  $k_{1\perp}^2$  вблизи нижнего предела доминирует, а вблизи верхнего предела — подавлен. В связи с таким поведением подынтегральной функции, интеграл по  $k_{1\perp}^2$  можно приближенно вычислить, вынося из под знака интеграла функции  $q(x_{1+})$  и  $\bar{q}(x_{2-})$  и полагая в них  $k_{1\perp}^2 = k_0^2$ . Тогда  $x_{1+}$  и  $x_{2-}$  имеют вид

$$x_{1+} = [\omega_1 + (\omega_1^2 - k_0^2)^{1/2}]/2E_1, \quad x_{2-} = [M_1 - \omega_1 + (\omega_1^2 - k_0^2)^{1/2}]/2E_2, \quad (7.128)$$

а интеграл по  $k_{1\perp}^2$  имеет вид

$$\int_{k_0^2}^{\omega_1^2} dk_{1\perp}^2 \exp(-2bk_{1\perp}^2) [(\omega_1^2 - k_{1\perp}^2)(k_{1\perp}^2 - k_0^2)]^{-1/2} = \pi \exp[-b(\omega_1^2 + k_0^2)] I_0[b(\omega_1^2 - k_0^2)], \quad (7.129)$$

где  $I_0(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента. В оставшемся интеграле по энергии  $\omega_1$  совершим замену переменной:  $\omega_1 = (M_1 + q_1 z)/2$ . Тогда этот интеграл представляется в форме

$$I = \frac{b^2}{2\pi} \exp\left[-\frac{b}{4}(M_1^2 + q_1^2) \int_{-1}^{z_0} dz q(x_{1+}) \bar{q}(x_{2-})\right] \times \exp\left[-\frac{b}{4}(M_1^2 + q_1^2) z^2\right] I_0\left[\frac{bq^2}{4}(1 - z^2)\right], \quad (7.130)$$

$$z_0 = \min(1, (2E_1 - M_1)/q_1).$$

Аргументы  $x_{1+}$  и  $x_{2-}$  принимают следующий вид:

$$x_{1+} = (M_1 + q_1 z + q[1 - z^2]^{1/2})/4E_1, \\ x_{2-} = (M_1 - q_1 z + q[1 - z^2]^{1/2})/4E_2.$$

Подынтегральное выражение в интеграле (7.130) сосредоточено в области значений  $z$ , близких к нулю. Медленно меняющиеся функции  $z$ :  $f(x_{1+})$  и  $f(x_{2-})$ , можно при оценке интеграла (7.130) вынести из под знака интеграла в точке  $z = 0$ . При этом их аргументы принимают следующие значения:

$$x_{1+} = (M_1 + q_1) \dot{q}_+ / 2M_1 \sqrt{s}, \quad x_{2-} = (M_1 + q_1) q_- / 2M_1 \sqrt{s}. \quad (7.131)$$

Здесь  $q_{\pm} = (q_0^* \pm q_z^*)$ . Оставшийся интеграл вычисляется методом пере-

вала (см., например, [73]):

$$\int_{-1}^{z_0} dz \exp(-Az^2) I_0[B(1 - z^2)] \approx I_0(B) \left\{ \int_0^{z_0} dz \exp(-cz^2) + \int_0^1 dz \exp(-cz^2) \right\} = (\pi/4c)^{1/2} I_0(B) \{ \Phi(\sqrt{c} z_0) + \Phi(\sqrt{c}) \}, \quad (7.132)$$

$$A = (b/4)(M_1 + q_1^2), \quad B = bq^2/4,$$

$$c = A + BI_1(B)/I_0(B).$$

Здесь  $I_1(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента, а интеграл вероятностей [41]

$$\Phi(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

При  $x \ll 1$   $\Phi(x) \approx 2\pi^{-1/2} x \exp(-x^2)$ . При  $x \gg 1$   $\Phi(x) \approx 1 - \exp(-x^2)/\pi^{1/2} x$ .

Окончательно для интеграла (7.120) получается следующее приближенное выражение:

$$I = \frac{b^2}{4(\pi c)^{1/2}} \exp(-A) I_0(B) q(x_{1+}) \bar{q}(x_{2-}) [\Phi(z_0 \sqrt{c}) + \Phi(\sqrt{c})] \quad (7.133)$$

(см. (7.130)–(7.132)). Погрешность приближенной формулы (7.133) не превышает 10%. В области значений  $(bq^2/4) \gg 1$  формула (7.133) упрощается и имеет простой вид:

$$I \approx b(\pi M_1 \sqrt{q^2})^{-1} \exp(-bq_1^2/2) q(x_{1+}) \bar{q}(x_{2-}).$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая эту книгу, авторы хотели бы выразить надежду, что выполнили свою главную задачу, ознакомить читателя с целями и методами современного кинематического анализа процессов, происходящих в мире элементарных частиц. Эта идея имеет несколько аспектов — введение в курс современных проблем физики малочастичных и множественных реакций, демонстрация роли кинематики в явлениях, происходящих на кварковом уровне, а также при создании теории взаимодействия элементарных частиц. Неслучайно проблемы кинематики частиц обсуждаются во многих случаях в тесной связи с современными динамическими моделями взаимодействий и структуры частиц.

Авторы хотели бы передать свою убежденность в необходимости изучения и активного применения кинематических методов при проведении экспериментальных и теоретических исследований в физике элементарных частиц всех диапазонов энергий. Успехи в создании теорий объединенного электрослабого взаимодействия и сильных взаимодействий, в обнаружении кварковой структуры адронов и открытии квантов слабого взаимодействия — промежуточных векторных бозонов — и многие другие заметные достижения физики высоких энергий (см., например, [66]), неизбежно опирались на мощный арсенал закономерностей и методов релятивистской кинематики. Без тщательного кинематического анализа нельзя подготовить проект физического эксперимента в физике элементарных частиц и интерпретировать с максимально возможной достоверностью его результаты.

Ни начинающему, ни искушенному физик-исследователю не обойтись без помощи кинематики и ее методов. Более 15 лет тому назад Г.И. Копылов, автор известного, но, увы, уже малодоступного руководства по кинематике резонансов [6], с горечью отмечал, что кинематику частиц студенты, специализирующиеся на экспериментальной ядерной физике, практически не изучают. Мы можем сейчас добавить к этому, что положение не только не изменилось к лучшему, но и усугубилось по "вине" самой физики элементарных частиц. Из-за бурного развития динамических разделов теории, совершенствования техники и методики экспериментов на ускорителях и в космических лучах курсы теоретической и экспериментальной ядерной физики и физики элементарных частиц столь плотно насытились новыми теоретическими и экспериментальными разработками и достижениями, что в них практически не осталось места для кинематики, отдельные элементы которой изучаются студентами на мощном фоне достижений

современной квантовой теории поля и экспериментальной физики, в распоряжении которой имеются ускорители протонов и электронов, ускорители на встречных пучках, рассчитанные на десятки, сотни и уже тысячи гигаэлектронвольт в Ц-системе.

Молодой специалист, приступая к самостоятельной работе в области физики элементарных частиц проявляет, как правило, прекрасную осведомленность в самых последних достижениях избранной им отрасли науки, но теряется перед необходимостью провести кинематический анализ поставленной перед ним исследовательской задачи средней сложности. Г.И. Копылов в своей книге [6] писал, что приобретать знания кинематики, столь нужные в практической работе в физике элементарных частиц, молодой специалист вынужден "в лучшем случае своим умом, в худшем — по журнальным статьям". Питая оптимистические надежды на радикальное улучшение "кинематического образования" молодых ученых в следующие 10–15 лет, авторы выражают надежду, что предлагаемая книга поможет преодолеть, хотя бы частично, те досадные "белые пятна", которые еще существуют в подготовке будущих и уже активно работающих исследователей.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
3. Перкинс Д. Введение в физику высоких энергий. — М.: Мир, 1975.
4. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. — М.: Наука, 1980.
5. Балдин А.М., Гольданский В.И., Максименко В.М., Розенталь И.Л. Кинематика ядерных реакций. — М.: Атомиздат, 1969.
6. Копылов Г.И. Основы кинематики резонансов. — М.: Наука, 1970.
7. Бюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц. — М.: Мир, 1975.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1973.
9. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1980.
10. Particle properties data. — Rev. Mod. Phys. 1984, v. 56, № 2, part II.
11. Окуль Л.Б. Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
12. Никитин Ю.П. Кинематика процессов образования и последующего распада тяжелых частиц. Текст лекции. — М.: МИФИ, 1981.
13. Макеев В.В., Невский П.Л., Никитин Ю.П. и др. Качественные особенности спектров лептонов в процессе образования  $W$ -бозонов в нейтринном пучке. — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 180.
14. Голубков Ю.А., Иванюков А.А., Никитин Ю.П., Рожнов Г.В. Квантовая партонная модель и возможность обнаружения  $W$ -бозона в нуклон-нуклонных соударениях при высоких энергиях. — Ядерная физика, 1973, т. 18, с. 393.
15. Quigg C. Production and detection of Intermediate Vector Bosons and heavy Leptons in  $pp$ - and  $p\bar{p}$ -collisions. — Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 297.
16. Okun L.B., Voloshin M.B. Production of Intermediate Bosons in  $pp$ - and  $p\bar{p}$ -collisions. — Nucl. Phys., 1977, B 120, p. 459.
17. Никитин Ю.П., Розенталь И.Л. Теория множественных процессов. — М.: Атомиздат, 1976.
18. Никитин Ю.П., Розенталь И.Л. Ядерная физика высоких энергий. — М.: Атомиздат, 1980.
19. Никитин Ю.П., Рубин С.Г. Кинематические особенности спектров заряженных лептонов от распада тяжелого лептона, образованного в процессе  $\nu_\mu + N \rightarrow L + \text{адроны}$ . — Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 1020.
20. Бармин В.В., Долголенко А.Г., Крестников Ю.С. и др. Обнаружение распада  $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ . — ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 1879.
21. Жижин Е.Д., Кребс А.Б., Никитин Ю.П. Нейтринорождение очарованных адронов. Текст лекции. — М.: МИФИ, 1984.
22. Горичев П.А., Калганов Н.В., Понсарова Е.А. и др. Исследование образования очарованных частиц в нейтринных взаимодействиях (эксперимент  $E - 128$ ). — Препринт Физического института АН СССР им. П.Н. Лебедева № 173, Москва, 1983.
23. Жижин Е.Д., Никитин Ю.П., Фанченко М.С. Квазиупругое образование очарованных бариев в процессах взаимодействия нейтрино с нуклонами. — Ядерная физика, 1983, т. 37, с. 1506.
24. Коноплич Р.В., Кузнецов Е.П., Никитин Ю.П. и др. Образование тяжелых лептонов в  $\nu(\bar{\nu})N$ -взаимодействиях. — Ядерная физика, 1984, т. 39, с. 441.
25. Азимов Я.И., Берков А.В., Жижин Е.Д. и др. Энергетические спектры вторичных лептонов в процессе  $e^+ + e^- \rightarrow L^+ + L^-$ . — Ядерная физика, 1977, т. 25, с. 630.
26. Берков А.В., Жижин Е.Д., Никитин Ю.П., Хозе В.А. Проверка гипотезы тяжелого лептона по адронным спектрам реакции  $e^+ e^- \rightarrow L^+ L^-$ . — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1644.
27. Жижин Е.Д., Кребс А.Б., Никитин Ю.П., Хозе В.А. Энергетические спектры  $\rho^0$ -мезонов в реакции  $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^- [\rightarrow \nu_\tau A_1^* (\rightarrow \rho^0 \pi^-)]$ . — Ядерная физика, 1978, т. 28, с. 1323.
28. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. — М.: Мир, 1975.
29. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
30. Ландау Л.Д. О множественном образовании частиц при столкновении быстрых частиц. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1953, т. 17, с. 51.
31. Daybog E.I., Rosental I.L. On the Existence of Fireballs. — Acta Phys. Hungar, 1970, v. 29, Suppl. 3, p. 267.
32. Дайбог Е.И., Розенталь И.Л. Об угловом распределении частиц, образованных во множественных процессах. — Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 226.
33. Адамович М.И., Ларионова В.Г., Масленникова Н.В. и др. Множественное рождение частиц при взаимодействии пионов и протонов с ядрами в области энергий 20–200 ГэВ. — Труды ФИАН, 1979, т. 108, с. 65.
34. Benecke J., Chou T.T., Yang C.N., Yen E. Hypothesis of Limiting Fragmentation on High-Energy Collisions. — Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 2159.
35. Feynman R.P. Very High-Energy Collisions of Hadrons. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1415.
36. Amati D., Stanghellini A., Fubini S. Theory of High Energy Scattering and Multiple Production. — Nuovo Cimento, 1962, v. 26, p. 896.
37. Левин Е.М., Рыскин М.Г. Процессы множественного рождения с точки зрения мультипериферической модели. — В кн.: Элементарные частицы. Первая школа физики ИТЭФ. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 2, с. 42.
38. Боресков К.Г., Кайдалов А.Б., Пономарев Л.А. Совместное описание эксклюзивного и инклюзивного образования частиц в модели реджезованного однопионного обмена. — В кн.: Элементарные частицы. Первая школа физики ИТЭФ. — М.: Атомиздат, 1973, т. 2, с. 94.
39. Ансельм А.А. Качественная картина сильных взаимодействий при высоких энергиях. — В кн.: Элементарные частицы. Первая школа физики ИТЭФ. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 2, с. 3.
40. Грибов В.Н. Пространственно-временное описание взаимодействия адронов при высоких энергиях. — В кн.: Элементарные частицы. Первая школа физики ИТЭФ. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 1, с. 65.
41. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
42. Коноплич Р.В., Кребс А.Б., Никитин Ю.П. Инклюзивное распределение лептонов от распадов очарованных мезонов, образованных в  $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)N$ -взаимодействиях и функция фрагментации  $s$ -кварка. — Ядерная физика, 1980, т. 31, с. 713.
43. Диденко Л.А., Мурзин В.С., Сарычева Л.И. Асимметрия адронных взаимодействий. — М.: Наука, 1981.
44. Мурзин В.С. Эффект асимметрии и кварковая структура адронов. — В кн.: Неупругие взаимодействия адронов и ядер. — Алма-Ата: Наука, 1984.
45. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть I. — М.: Наука, 1976.
46. Максименко В.М., Розенталь И.Л. О ковариантных статистических теориях множественного образования частиц. — ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 754.
47. Милехин Г.А. Анализ возможных гидродинамических моделей при обобщенном уравнении состояния. — В кн.: Труды международной конференции по космическим лучам. — М.: Изд-во АН СССР, 1960, т. 1, с. 223.
48. Fermi E. High Energy Nuclear Events. — Prog. Theor. Phys., 1950, v. 5, p. 570.
49. Максименко В.М. К вопросу об аннигиляции антинуклонов. — ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 232.
50. Померанчук И.Я. К теории образования многих частиц в одном акте. — Доклады АН СССР, 1951, т. 78, с. 889.

50. Фейнберг Е.Л. Множественная генерация адронов и статистическая теория. — УФН, 1971, т. 104, с. 539.
51. Srivastava P., Sudarshan G. Multiple Production of Pions in Nuclear Collisions. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 781.
52. Шехтер В.М. Кварки-партоны и составляющие кварки. — Ядерная физика. 1981, т. 33, с. 817.  
Анисович В.В. и др. Аддитивная кварковая модель и процессы множественного рождения. — УФН, 1984, т. 144, с. 553.
53. Розенталь И.Л., Тарасов Ю.А. Гидродинамическая теория множественных процессов в свете современных экспериментальных данных. — ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1535.
54. Shuryak E. V. Quantum Chromodynamics and the Theory of Superdense Matter. — Phys. Rep., 1980, v. 61, p. 70.
55. Волошин М.Б., Тер-Мартirosян К.А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
56. Очелков Ю.П., Прилуцкий О.Ф., Розенталь И.Л., Усов В.В. Релятивистская кинетика и гидродинамика. — М.: Атомиздат, 1979.
57. Розенталь И.Л. Квазиодномерная интерпретация гидродинамической теории множественного образования частиц. — ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 278.
58. Халатников И.М. Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики. — ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 529.
59. Тарасов Ю.А. О поперечных импульсах и составе вторичных частиц в гидродинамической теории множественного рождения. — Ядерная физика. 1985, т. 42, с. 411.
60. Милехин Г.А. Уточнение гидродинамической теории множественного рождения. — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1185.
61. Иоффе Б.Л., Липатов Л.Н., Хозе В.А. Глубоконеупругие процессы. Феноменология. Кварк-партоновая модель. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
62. Биленький С.М. Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов. — М.: Энергоиздат, 1981.
63. Bjorken J.D. Inequalities for Electron and Muon Scattering from Nucleons. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 408.
64. Кендал Г., Панофский В. Структура протона и нейтрона. — УФН, 1972, т. 106, с. 315.
65. Ермолов П.Ф., Мухин А.И. Нейтринные эксперименты при высоких энергиях. — УФН, 1978, т. 124, с. 358.
66. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1984.
67. Коккедэ Я. Теория кварков. — М.: Мир, 1971.
68. Клоуз Ф. Кварки и партоны. Введение в теорию. — М.: Мир, 1982.
69. Коноплич Р.В., Кребс А.Б., Никитин Ю.П. Инклюзивное распределение лептонов от распадов очарованных мезонов, образованных в  $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)N$ -взаимодействиях и функция фрагментации  $c$ -кварка. — Ядерная физика, 1980, т. 31, с. 713.
70. Drell S.D., Yan T.M. Massive Lepton-pair Production in Hadron-Hadron Collision at high Energies. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 316.
71. Докшицер Ю.Л., Дьяконов Д.И., Троян С.И. Жесткие процессы в квантовой хромодинамике. — В кн.: Физика элементарных частиц (Материалы XIII зимней школы ЛИЯФ). — Л.: ЛИЯФ, 1978, ч. 2, с. 3.
72. Голубков Ю.А., Коноплич Р.В., Никитин Ю.П. Образование векторных мезонов в адрон-нуклонных соударениях и поперечное движение партонов. — Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1629.
73. Мигдал А.Б. Качественные методы в квантовой теории. — М.: Наука, 1975.